Cox Ringe

Johannes Schmitt
TU Kaiserslautern
25. März 2021

Die Idee

Der projektive Raum

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$$

hat einen "homogenen Koordinatenring":

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[\underline{x}] &:= \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\ &= \bigoplus_{k \geq 0} \left(\{f \in \mathbb{C}[\underline{x}] \mid f \text{ homogen von Grad } k\} \cup \{0\}\right).\end{aligned}$$

Die Idee

Der projektive Raum

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$$

hat einen "homogenen Koordinatenring":

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[\underline{x}] &:= \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= \bigoplus_{k \geq 0} \left(\{f \in \mathbb{C}[\underline{x}] \mid f \text{ homogen von Grad } k\} \cup \{0\}\right).\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$

Die Idee

Der projektive Raum

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$$

hat einen "homogenen Koordinatenring":

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[\underline{x}] &:= \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= \bigoplus_{k \geq 0} \big(\{f \in \mathbb{C}[\underline{x}] \mid f \text{ homogen von Grad } k\} \cup \{0\}\big) .\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$
Für Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n$ entsprechend $\mathbb{C}[\underline{x}]/I(V)$ mit homogenem Ideal $I(V)$.

Die Idee

Der projektive Raum

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$$

hat einen “homogenen Koordinatenring”:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[\underline{x}] &:= \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= \bigoplus_{k \geq 0} \left(\{f \in \mathbb{C}[\underline{x}] \mid f \text{ homogen von Grad } k\} \cup \{0\}\right).\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$
Für Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n$ entsprechend $\mathbb{C}[\underline{x}]/I(V)$ mit homogenem Ideal $I(V)$.

Was ist mit nicht-projektiven Varietäten?

Die Idee

Mise en Place

Cox Ringe

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe.

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G, +)$ ein abelsches Monoid.

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Ein G-graduierter Ring ist ein Ring R mit einer Zerlegung

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

in abelsche Gruppen $(R_g,+)$, sodass $R_g R_h \subseteq R_{g+h}$.

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Ein G-graduierter Ring ist ein Ring R mit einer Zerlegung

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

in abelsche Gruppen $(R_g, +)$, sodass $R_g R_h \subseteq R_{g+h}$. Elemente in $R_g \setminus \{0\}$ heißen *homogen* von Grad g.

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Ein G-graduierter Ring ist ein Ring R mit einer Zerlegung

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

in abelsche Gruppen $(R_g, +)$, sodass $R_g R_h \subseteq R_{g+h}$. Elemente in $R_g \setminus \{0\}$ heißen *homogen* von Grad g.

Beispiel

Der Polynomring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ist $\mathbb{Z}$-graduiert:

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Ein G-graduierter Ring ist ein Ring R mit einer Zerlegung

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

in abelsche Gruppen $(R_g, +)$, sodass $R_g R_h \subseteq R_{g+h}$. Elemente in $R_g \setminus \{0\}$ heißen *homogen* von Grad g.

Beispiel

Der Polynomring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ist $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduiert:

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Ein G-graduierter Ring ist ein Ring R mit einer Zerlegung

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

in abelsche Gruppen $(R_g,+)$, sodass $R_g R_h \subseteq R_{g+h}$. Elemente in $R_g \setminus \{0\}$ heißen *homogen* von Grad g.

Beispiel

Der Polynomring $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ ist $\mathbb{Z}$-graduiert:

$$0 \neq f \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_k \iff \text{für alle Monome } x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \text{ von } f \text{ gilt } \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = k\,.$$

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Ein G-graduierter Ring ist ein Ring R mit einer Zerlegung

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

in abelsche Gruppen $(R_g,+)$, sodass $R_g R_h \subseteq R_{g+h}$. Elemente in $R_g \setminus \{0\}$ heißen *homogen* von Grad g.

Beispiel

Der Polynomring $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduiert:

Graduierte Ringe

Definition

Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Ein G-graduierter Ring ist ein Ring R mit einer Zerlegung

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

in abelsche Gruppen $(R_g, +)$, sodass $R_g R_h \subseteq R_{g+h}$. Elemente in $R_g \setminus \{0\}$ heißen *homogen* von Grad g.

Beispiel

Der Polynomring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduiert:

$$0 \neq f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_k \iff \begin{array}{l} \text{für alle Monome } x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ \text{von } f \text{ gilt } \sum_{i=1}^n \alpha_i \equiv k \bmod 2\,. \end{array}$$

Graduierte Ringe

Definition

Ein Morphism zwischen einem G-graduierten Ring R und einem H-graduierten Ring S ist ein Paar $(\psi, \tilde{\psi})$, wobei $\psi : R \to S$ ein Ringmorphismus und $\tilde{\psi} : G \to H$ ein Gruppenmorphismus ist, sodass

$$\psi(R_g) \subseteq S_{\tilde{\psi}(g)}$$

für alle $g \in G$.

Graduierte Ringe

Definition

Ein Morphism zwischen einem G-graduierten Ring R und einem H-graduierten Ring S ist ein Paar $(\psi, \tilde{\psi})$, wobei $\psi : R \to S$ ein Ringmorphismus und $\tilde{\psi} : G \to H$ ein Gruppenmorphismus ist, sodass

$$\psi(R_g) \subseteq S_{\tilde{\psi}(g)}$$

für alle $g \in G$.
Wenn $G = H$ und $\tilde{\psi} = \mathrm{id}_G$, dann heißt ψ auch G-graduierter Morphismus.

Graduierte Ringe

Definition

Ein Morphism zwischen einem G-graduierten Ring R und einem H-graduierten Ring S ist ein Paar $(\psi, \tilde{\psi})$, wobei $\psi : R \to S$ ein Ringmorphismus und $\tilde{\psi} : G \to H$ ein Gruppenmorphismus ist, sodass

$$\psi(R_g) \subseteq S_{\tilde{\psi}(g)}$$

für alle $g \in G$.
Wenn $G = H$ und $\tilde{\psi} = \mathrm{id}_G$, dann heißt ψ auch G-graduierter Morphismus.

Beispiel

Sei $\psi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ die Identität und $\tilde{\psi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Projektion.

Graduierte Ringe

Definition

Ein Morphism zwischen einem G-graduierten Ring R und einem H-graduierten Ring S ist ein Paar $(\psi, \tilde{\psi})$, wobei $\psi : R \to S$ ein Ringmorphismus und $\tilde{\psi} : G \to H$ ein Gruppenmorphismus ist, sodass

$$\psi(R_g) \subseteq S_{\tilde{\psi}(g)}$$

für alle $g \in G$.
Wenn $G = H$ und $\tilde{\psi} = \mathrm{id}_G$, dann heißt ψ auch G-graduierter Morphismus.

Beispiel

Sei $\psi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ die Identität und $\tilde{\psi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Projektion. Dann ist $(\psi, \tilde{\psi})$ ein Morphismus vom $\mathbb{Z}$-graduierten Polynomring zum $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten Polynomring.

Konvention

Alle Varietäten seien komplex, normal und irreduzibel.

Divisoren

Sei X eine Varietät.

Divisoren

Sei X eine Prävarietät.

Divisoren

Sei X eine Varietät.

Divisoren

Sei X eine Varietät.

Definition

Ein **Primdivisor** ist eine Untervarietät $D \subseteq X$ mit Kodimension 1.

Divisoren

Sei X eine Varietät.

Definition

Ein **Primdivisor** ist eine Untervarietät $D \subseteq X$ mit Kodimension 1.
Die Primdivisoren erzeugen die freie abelsche Gruppe $\operatorname{Div} X$.

Divisoren

Sei X eine Varietät.

Definition

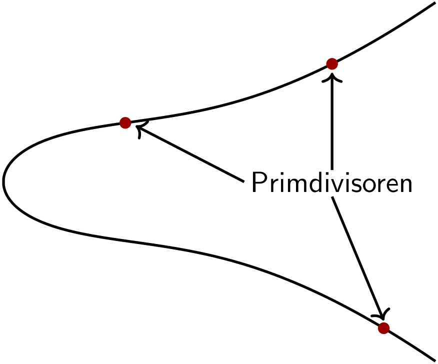
Ein **Primdivisor** ist eine Untervarietät $D \subseteq X$ mit Kodimension 1.
Die Primdivisoren erzeugen die freie abelsche Gruppe $\operatorname{Div} X$.
Ein **Weil Divisor** ist ein Element von $\operatorname{Div} X$.

Divisoren

Sei X eine Varietät.

Definition

Ein **Primdivisor** ist eine Untervarietät $D \subseteq X$ mit Kodimension 1.
Die Primdivisoren erzeugen die freie abelsche Gruppe $\operatorname{Div} X$.
Ein **Weil Divisor** ist ein Element von $\operatorname{Div} X$.



Klassengruppe

Man kann jeder rationalen Funktion $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ einen **Hauptdivisor** $\operatorname{div} f$ zuordnen.

Klassengruppe

Man kann jeder rationalen Funktion $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ einen **Hauptdivisor** $\operatorname{div} f$ zuordnen.

Definition

Zwei Divisoren $D, D' \in \operatorname{Div} X$ heißen **linear äquivalent**, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.

Klassengruppe

Man kann jeder rationalen Funktion $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ einen **Hauptdivisor** $\operatorname{div} f$ zuordnen.

Definition

Zwei Divisoren $D, D' \in \operatorname{Div} X$ heißen **linear äquivalent**, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.
Die Gruppe $\operatorname{Div} X$ modulo die Gruppe der Hauptdivisoren ist die **Divisorenklassengruppe** $\mathrm{Cl}(X)$.

Klassengruppe

Man kann jeder rationalen Funktion $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ einen **Hauptdivisor** $\operatorname{div} f$ zuordnen.

Definition

Zwei Divisoren $D, D' \in \operatorname{Div} X$ heißen **linear äquivalent**, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.
Die Gruppe $\operatorname{Div} X$ modulo die Gruppe der Hauptdivisoren ist die **Divisorenklassengruppe** $\mathrm{Cl}(X)$.

Beispiel

Es gilt $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \langle [V(x_0)] \rangle \cong \mathbb{Z}$, siehe [Hartshorne, II.6.4].

Klassengruppe

Man kann jeder rationalen Funktion $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ einen **Hauptdivisor** $\operatorname{div} f$ zuordnen.

Definition

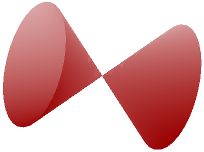
Zwei Divisoren $D, D' \in \operatorname{Div} X$ heißen **linear äquivalent**, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.
Die Gruppe $\operatorname{Div} X$ modulo die Gruppe der Hauptdivisoren ist die **Divisorenklassengruppe** $\operatorname{Cl}(X)$.

Beispiel

Es gilt $\operatorname{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \langle [V(x_0)] \rangle \cong \mathbb{Z}$, siehe [Hartshorne, II.6.4].

Beispiel

Sei $X = V(xy - z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$.



Klassengruppe

Man kann jeder rationalen Funktion $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ einen **Hauptdivisor** $\operatorname{div} f$ zuordnen.

Definition

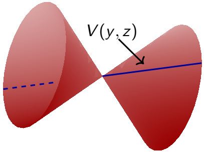
Zwei Divisoren $D, D' \in \operatorname{Div} X$ heißen **linear äquivalent**, wenn $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.
Die Gruppe $\operatorname{Div} X$ modulo die Gruppe der Hauptdivisoren ist die **Divisorenklassengruppe** $\mathrm{Cl}(X)$.

Beispiel

Es gilt $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \langle [V(x_0)] \rangle \cong \mathbb{Z}$, siehe [Hartshorne, II.6.4].

Beispiel

Sei $X = V(xy - z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$.
Dann gilt $\mathrm{Cl}(X) \cong \langle [V(y, z)] \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
siehe [Hartshorne, II.6.5.3].



Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0 \,.$$

Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0\,.$$

Betrachte den Vektorraum

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathbb{C}(X)^\times : \operatorname{div} f + D \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0\,.$$

Betrachte die Garbe $\mathcal{O}_X(D)$ gegeben durch

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathbb{C}(X)^\times : (\operatorname{div} f + D)|_U \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0\,.$$

Betrachte den Vektorraum

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathbb{C}(X)^\times : \operatorname{div} f + D \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0\,.$$

Betrachte den Vektorraum

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathbb{C}(X)^\times : \operatorname{div} f + D \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}^n$ und $D = V(x_0)$, also $\operatorname{Cl}(X) = \langle [D] \rangle$.

Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0\,.$$

Betrachte den Vektorraum

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathbb{C}(X)^\times : \operatorname{div} f + D \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}^n$ und $D = V(x_0)$, also $\operatorname{Cl}(X) = \langle [D] \rangle$. Sei $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ mit $\operatorname{div} f + D \geq 0$.

Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0 .$$

Betrachte den Vektorraum

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathbb{C}(X)^\times : \operatorname{div} f + D \geq 0\} \cup \{0\} .$$

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}^n$ und $D = V(x_0)$, also $\mathrm{Cl}(X) = \langle [D] \rangle$. Sei $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ mit $\operatorname{div} f + D \geq 0$. Dann ist $f = g/h$ mit $g, h \in \mathbb{C}[\underline{x}]$ teilerfremd und homogen vom gleichem Grad.

Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0\,.$$

Betrachte den Vektorraum

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathbb{C}(X)^\times : \operatorname{div} f + D \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}^n$ und $D = V(x_0)$, also $\operatorname{Cl}(X) = \langle [D] \rangle$. Sei $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ mit $\operatorname{div} f + D \geq 0$. Dann ist $f = g/h$ mit $g, h \in \mathbb{C}[\underline{x}]$ teilerfremd und homogen vom gleichem Grad. Wegen $\operatorname{div} g - \operatorname{div} h + D \geq 0$ ist $f \in \mathbb{C}^\times$ oder $f = g/x_0$ mit g homogen von Grad 1.

Garben

Sei $D \in \operatorname{Div} X$ mit $D = \sum n_Y Y$. Schreibe

$$D \geq 0 :\Longleftrightarrow \forall Y : n_Y \geq 0\,.$$

Betrachte den Vektorraum

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in \mathbb{C}(X)^\times : \operatorname{div} f + D \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}^n$ und $D = V(x_0)$, also $\mathrm{Cl}(X) = \langle [D] \rangle$. Sei $f \in \mathbb{C}(X)^\times$ mit $\operatorname{div} f + D \geq 0$. Dann ist $f = g/h$ mit $g, h \in \mathbb{C}[\underline{x}]$ teilerfremd und homogen vom gleichem Grad. Wegen $\operatorname{div} g - \operatorname{div} h + D \geq 0$ ist $f \in \mathbb{C}^\times$ oder $f = g/x_0$ mit g homogen von Grad 1. Dies ergibt einen Isomorphismus

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{\cdot x_0} \{f \in \mathbb{C}[\underline{x}] : f \text{ homogen von Grad } 1\} \cup \{0\}\,.$$

Die Idee

Mise en Place

Cox Ringe

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Der Cox Ring von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{D \in G} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))\,.$$

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Die Cox Garbe von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R} := \bigoplus_{D \in G} \mathcal{O}_X(D)\,.$$

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Der Cox Ring von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{D \in G} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) .$$

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \mathrm{Div}\, X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Der Cox Ring von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{D \in G} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) .$$

Der Cox Ring ist $G \cong \mathrm{Cl}(X)$-graduiert, da

$$\mathrm{div}\, f + D \geq 0 \text{ und } \mathrm{div}\, g + E \geq 0 \Longrightarrow \mathrm{div}(fg) + D + E \geq 0 .$$

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Der Cox Ring von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{D \in G} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)).$$

Der Cox Ring ist $G \cong \mathrm{Cl}(X)$-graduiert, da

$$\operatorname{div} f + D \geq 0 \text{ und } \operatorname{div} g + E \geq 0 \Longrightarrow \operatorname{div}(fg) + D + E \geq 0.$$

Fakt

Die Definition ist unabhängig von G: Verschiedene Gruppen geben (graduiert) isomorphe Cox Ringe.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Der Cox Ring von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{D \in G} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) .$$

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Der Cox Ring von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{D \in G} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))\,.$$

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}^n$, $D = V(x_0)$ und $G = \mathbb{Z}D$.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Der Cox Ring von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{D \in G} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \,.$$

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}^n$, $D = V(x_0)$ und $G = \mathbb{Z}D$. Für $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(kD)) \cong \{f \in \mathbb{C}[\underline{x}] : f \text{ homogen von Grad } k\} \cup \{0\} \,.$$

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und **frei**. Wähle eine endlich erzeugte Untergruppe $G \leq \operatorname{Div} X$, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition

Der Cox Ring von X ist definiert als (in Abhängigkeit von G)

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{D \in G} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \,.$$

Beispiel

Sei $X = \mathbb{P}^n$, $D = V(x_0)$ und $G = \mathbb{Z}D$. Für $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(kD)) \cong \{f \in \mathbb{C}[\underline{x}] : f \text{ homogen von Grad } k\} \cup \{0\} \,.$$

Also ist $\mathcal{R}(X) \cong \mathbb{C}[\underline{x}]$ mit $\mathbb{Z}$-Graduierung.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und sei $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = \mathbb{C}^\times$.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und sei $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = \mathbb{C}^\times$. Wähle $G \leq \operatorname{Div} X$ endlich erzeugt, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ surjektiv ist.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und sei $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = \mathbb{C}^\times$. Wähle $G \leq \operatorname{Div} X$ endlich erzeugt, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ surjektiv ist.

"Definition"

Die Cox Garbe von X ist definiert als Quotient

$$\mathcal{R} := \Big(\bigoplus_{D \in G} \mathcal{O}_X(D) \Big) / \mathcal{I} \, ,$$

mit einer gewissen Garbe von Idealen $\mathcal{I}$.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und sei $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = \mathbb{C}^\times$. Wähle $G \leq \operatorname{Div} X$ endlich erzeugt, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ surjektiv ist.

"Definition"

Die Cox Garbe von X ist definiert als Quotient

$$\mathcal{R} := \Big(\bigoplus_{D \in G} \mathcal{O}_X(D) \Big) / \mathcal{I} \,,$$

mit einer gewissen Garbe von Idealen $\mathcal{I}$. Der Cox Ring ist dann

$$\mathcal{R}(X) := \Gamma(X, \mathcal{R}) \,,$$

wiederum $\mathrm{Cl}(X)$-graduiert.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und sei $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = \mathbb{C}^\times$. Wähle $G \leq \operatorname{Div} X$ endlich erzeugt, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ surjektiv ist.

"Definition"

Die Cox Garbe von X ist definiert als Quotient

$$\mathcal{R} := \Big(\bigoplus_{D \in G} \mathcal{O}_X(D) \Big) / \mathcal{I} \,,$$

mit einer gewissen Garbe von Idealen $\mathcal{I}$. Der Cox Ring ist dann

$$\mathcal{R}(X) := \Gamma(X, \mathcal{R}) \,,$$

wiederum $\mathrm{Cl}(X)$-graduiert.

Beispiel

Sei $X = V(xy - z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$.

Cox Ringe

Sei $\mathrm{Cl}(X)$ endlich erzeugt und sei $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = \mathbb{C}^\times$. Wähle $G \leq \operatorname{Div} X$ endlich erzeugt, sodass die Projektion $G \to \mathrm{Cl}(X)$ surjektiv ist.

"Definition"

Die Cox Garbe von X ist definiert als Quotient

$$\mathcal{R} := \Big(\bigoplus_{D \in G} \mathcal{O}_X(D) \Big) / \mathcal{I} \,,$$

mit einer gewissen Garbe von Idealen $\mathcal{I}$. Der Cox Ring ist dann

$$\mathcal{R}(X) := \Gamma(X, \mathcal{R}) \,,$$

wiederum $\mathrm{Cl}(X)$-graduiert.

Beispiel

Sei $X = V(xy - z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$. Der Cox Ring $\mathcal{R}(X)$ ist der Polynomring $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ graduiert mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cox Ringe – Das Beste kommt erst noch

Erinnerung: $\mathbb{C}^2/G = V(xy - z^2)$ mit $G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong C_2$.

Cox Ringe – Das Beste kommt erst noch

Erinnerung: $\mathbb{C}^2/G = V(xy - z^2)$ mit $G = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \cong C_2$.
Sei $G \leq \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$ endlich, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Cox Ringe – Das Beste kommt erst noch

Erinnerung: $\mathbb{C}^2/G = V(xy - z^2)$ mit $G = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \cong C_2$.
Sei $G \leq \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$ endlich, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Satz

Es gilt

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n/G) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) =: \mathrm{Ab}(G)^\vee \,.$$

Cox Ringe – Das Beste kommt erst noch

Erinnerung: $\mathbb{C}^2/G = V(xy - z^2)$ mit $G = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \cong C_2$.
Sei $G \leq \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$ endlich, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Satz

Es gilt

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n/G) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) =: \mathrm{Ab}(G)^\vee\,.$$

Daher auch $\mathrm{Cl}(V(xy - z^2)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$!

Cox Ringe – Das Beste kommt erst noch

Erinnerung: $\mathbb{C}^2/G = V(xy - z^2)$ mit $G = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \cong C_2$.
Sei $G \leq \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$ endlich, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Satz

Es gilt

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n/G) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) =: \mathrm{Ab}(G)^\vee .$$

Daher auch $\mathrm{Cl}(V(xy - z^2)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$!

Satz (Arzhantsev–Gaĭfullin, 2010)

Der Cox Ring $\mathcal{R}(\mathbb{C}^n/G)$ ist $\mathrm{Ab}(G)^\vee$-graduiert isomorph zu $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{[G,G]}$.

Cox Ringe – Das Beste kommt erst noch

Erinnerung: $\mathbb{C}^2/G = V(xy - z^2)$ mit $G = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \cong C_2$.
Sei $G \leq \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$ endlich, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Satz

Es gilt

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n/G) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) =: \mathrm{Ab}(G)^\vee .$$

Daher auch $\mathrm{Cl}(V(xy - z^2)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$!

Satz (Arzhantsev–Gaĭfullin, 2010)

Der Cox Ring $\mathcal{R}(\mathbb{C}^n/G)$ ist $\mathrm{Ab}(G)^\vee$-graduiert isomorph zu $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{[G,G]}$.

Für $G = C_2$ ist $[G, G]$ trivial, also $\mathcal{R}(\mathbb{C}^2/G) \cong \mathbb{C}[x_1, x_2]$.