Seminar Darstellungstheorie
und darüber hinaus

Kaplanskys Vermutungen sind NP-schwer

Johannes Schmitt
TU Kaiserslautern
24. November 2022

Kaplanskys Vermutungen

Boolean satisfiability

Unit conjecture und SAT

Und jetzt?

Kaplanskys Vermutungen

Kaplanskys Vermutungen

Sei G eine (multiplikative) Gruppe und K ein Körper.

Kaplanskys Vermutungen

Sei G eine (multiplikative) Gruppe und K ein Körper.

Unit conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann sind alle Einheiten in $K[G]$ trivial, das heißt von der Form λg mit $\lambda \in K^\times$ und $g \in G$.

Kaplanskys Vermutungen

Sei G eine (multiplikative) Gruppe und K ein Körper.

Unit conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann sind alle Einheiten in $K[G]$ trivial, das heißt von der Form λg mit $\lambda \in K^\times$ und $g \in G$.

Zero-divisor conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann gibt es keine echten Nullteiler in $K[G]$.

Kaplanskys Vermutungen

Sei G eine (multiplikative) Gruppe und K ein Körper.

Unit conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann sind alle Einheiten in $K[G]$ trivial, das heißt von der Form λg mit $\lambda \in K^\times$ und $g \in G$.

Zero-divisor conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann gibt es keine echten Nullteiler in $K[G]$.

Idempotent conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann gibt es außer 0 und 1 keine idempotenten Elemente in $K[G]$.

Kaplanskys Vermutungen

Sei G eine (multiplikative) Gruppe und K ein Körper.

Unit conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann sind alle Einheiten in $K[G]$ trivial, das heißt von der Form λg mit $\lambda \in K^\times$ und $g \in G$.

Zero-divisor conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann gibt es keine echten Nullteiler in $K[G]$.

Idempotent conjecture

Sei G torsionsfrei. Dann gibt es außer 0 und 1 keine idempotenten Elemente in $K[G]$.

Offen seit circa 80 Jahren!

Implikationen

Implikationen

Jedes idempotente Element x ist ein Nullteiler: $x(x-1)=0$.

Implikationen

Jedes idempotente Element x ist ein Nullteiler: $x(x-1)=0$.

zero-divisor conjecture $\Longrightarrow$ idempotent conjecture

Implikationen

Jedes idempotente Element x ist ein Nullteiler: $x(x-1)=0$.

$$\text{zero-divisor conjecture} \Longrightarrow \text{idempotent conjecture}$$

Lemma

Sei G torsionsfrei. Es existiert genau dann ein echter Nullteiler in $K[G]$, wenn es ein Element $0 \neq x \in K[G]$ mit $x^2=0$ gibt.

Implikationen

Jedes idempotente Element x ist ein Nullteiler: $x(x-1) = 0$.

$$\text{zero-divisor conjecture} \Longrightarrow \text{idempotent conjecture}$$

Lemma

Sei G torsionsfrei. Es existiert genau dann ein echter Nullteiler in $K[G]$, wenn es ein Element $0 \neq x \in K[G]$ mit $x^2 = 0$ gibt. Wenn ein solches Element existiert, ist darüberhinaus $1 - x$ eine (nicht-triviale) Einheit von $K[G]$.

Implikationen

Jedes idempotente Element x ist ein Nullteiler: $x(x-1)=0$.

$$\text{zero-divisor conjecture} \Longrightarrow \text{idempotent conjecture}$$

Lemma

Sei G torsionsfrei. Es existiert genau dann ein echter Nullteiler in $K[G]$, wenn es ein Element $0 \neq x \in K[G]$ mit $x^2 = 0$ gibt. Wenn ein solches Element existiert, ist darüberhinaus $1-x$ eine (nicht-triviale) Einheit von $K[G]$.

$$\text{unit conjecture} \Longrightarrow \text{zero-divisor conjecture}$$

Torsionsfrei?

Torsionsfrei?

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ echte Nullteiler.

Torsionsfrei?

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ echte Nullteiler.

Beweis.

Sei $g \in G$ mit $g^n = 1$. Dann gilt $(1-g)(\sum_{k=0}^{n-1} g^k) = 0$. □

Torsionsfrei?

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ echte Nullteiler.

Beweis.

Sei $g \in G$ mit $g^n = 1$. Dann gilt $(1-g)(\sum_{k=0}^{n-1} g^k) = 0$. □

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ nicht-triviale Einheiten, außer in den Fällen $K = \mathbb{F}_2$ und $G = C_2$ oder $G = C_3$, sowie $K = \mathbb{F}_3$ und $G = C_2$.

Torsionsfrei?

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ echte Nullteiler.

Beweis.

Sei $g \in G$ mit $g^n = 1$. Dann gilt $(1-g)(\sum_{k=0}^{n-1} g^k) = 0$. □

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ nicht-triviale Einheiten, außer in den Fällen $K = \mathbb{F}_2$ und $G = C_2$ oder $G = C_3$, sowie $K = \mathbb{F}_3$ und $G = C_2$.

Beweis ist schwieriger.

Torsionsfrei?

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ echte Nullteiler.

Beweis.

Sei $g \in G$ mit $g^n = 1$. Dann gilt $(1 - g)(\sum_{k=0}^{n-1} g^k) = 0$. □

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ nicht-triviale Einheiten, außer in den Fällen $K = \mathbb{F}_2$ und $G = C_2$ oder $G = C_3$, sowie $K = \mathbb{F}_3$ und $G = C_2$.

Beweis ist schwieriger.

Beispiel

Sei $K = \mathbb{F}_3$ und $G = C_3$ mit Erzeuger $g \in G$.

Torsionsfrei?

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ echte Nullteiler.

Beweis.

Sei $g \in G$ mit $g^n = 1$. Dann gilt $(1 - g)(\sum_{k=0}^{n-1} g^k) = 0$. $\square$

Lemma

Sei G eine Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Dann enthält $K[G]$ nicht-triviale Einheiten, außer in den Fällen $K = \mathbb{F}_2$ und $G = C_2$ oder $G = C_3$, sowie $K = \mathbb{F}_3$ und $G = C_2$.

Beweis ist schwieriger.

Beispiel

Sei $K = \mathbb{F}_3$ und $G = C_3$ mit Erzeuger $g \in G$. Dann ist $g + g^2 \in K[G]$ eine Einheit: $(g + g^2)(1 - g - g^2) = 1$.

Ab jetzt:

G torsionsfrei

Was ist bekannt?

Was ist bekannt?

„... with frankly very little supporting evidence, it was conjectured that if G is torsion free, then $K[G]$ has no zero divisors. Amazingly, this conjecture has held up for over 30 years."

– Donald S. Passman, „The algebraic structure of group rings", 1977

Was ist bekannt?

Die Vermutungen gelten für große Familien von Gruppen.

Zum Beispiel:

Was ist bekannt?

Die Vermutungen gelten für große Familien von Gruppen.

Zum Beispiel:

- Zero-divisor conjecture für virtuell auflösbare Gruppen und elementar mittelbare Gruppen

Was ist bekannt?

Die Vermutungen gelten für große Familien von Gruppen.

Zum Beispiel:

- Zero-divisor conjecture für virtuell auflösbare Gruppen und elementar mittelbare Gruppen
- Idempotent conjecture für hyperbolische Gruppen und mittelbare Gruppen

Was ist bekannt?

Die Vermutungen gelten für große Familien von Gruppen.

Zum Beispiel:

- Zero-divisor conjecture für virtuell auflösbare Gruppen und elementar mittelbare Gruppen
- Idempotent conjecture für hyperbolische Gruppen und mittelbare Gruppen
- Implikationen zwischen zero-divisor / idempotent conjecture und anderen Vermutungen bekannt (Atiyah conjecture, Farrell–Jones conjecture, Baum–Connes conjecture)

Was ist bekannt?

Die Vermutungen gelten für große Familien von Gruppen.

Zum Beispiel:

- Zero-divisor conjecture für virtuell auflösbare Gruppen und elementar mittelbare Gruppen
- Idempotent conjecture für hyperbolische Gruppen und mittelbare Gruppen
- Implikationen zwischen zero-divisor / idempotent conjecture und anderen Vermutungen bekannt (Atiyah conjecture, Farrell–Jones conjecture, Baum–Connes conjecture)
- Deutlich weniger für die unit conjecture

Gegenbeispiel

Gegenbeispiel

Satz (Gardam, 2021)

Sei G die torsionsfreie Gruppe mit der Präsentation

$$G = \langle a, b \mid b^{-1}a^2b = a^{-2}, a^{-1}b^2a = b^{-2}\rangle \ .$$

Dann enhält der Ring $\mathbb{F}_2[G]$ nicht-triviale Einheiten.

Gegenbeispiel

Satz (Gardam, 2021)

Sei G die torsionsfreie Gruppe mit der Präsentation

$$G = \langle a, b \mid b^{-1}a^2b = a^{-2}, a^{-1}b^2a = b^{-2}\rangle \ .$$

Dann enhält der Ring $\mathbb{F}_2[G]$ nicht-triviale Einheiten.

Satz (Murray, 2021)

Sei G die obige Gruppe und sei p eine beliebige Primzahl. Dann enhält der Ring $\mathbb{F}_p[G]$ nicht-triviale Einheiten.

Gegenbeispiel

Satz (Gardam, 2021)

Sei G die torsionsfreie Gruppe mit der Präsentation

$$G = \langle a, b \mid b^{-1}a^2b = a^{-2}, a^{-1}b^2a = b^{-2} \rangle \ .$$

Dann enhält der Ring $\mathbb{F}_2[G]$ nicht-triviale Einheiten.

Satz (Murray, 2021)

Sei G die obige Gruppe und sei p eine beliebige Primzahl. Dann enhält der Ring $\mathbb{F}_p[G]$ nicht-triviale Einheiten.

Beweis: Nachrechnen.

Gegenbeispiel

Satz (Gardam, 2021)

Sei G die torsionsfreie Gruppe mit der Präsentation

$$G = \langle a, b \mid b^{-1}a^2b = a^{-2}, a^{-1}b^2a = b^{-2} \rangle \ .$$

Dann enhält der Ring $\mathbb{F}_2[G]$ nicht-triviale Einheiten.

Satz (Murray, 2021)

Sei G die obige Gruppe und sei p eine beliebige Primzahl. Dann enhält der Ring $\mathbb{F}_p[G]$ nicht-triviale Einheiten.

Beweis: Nachrechnen.

Methode: Reduktion auf ein SAT-Problem!

Kaplanskys Vermutungen

Boolean satisfiability

Unit conjecture und SAT

Und jetzt?

Boolean satisfiability

Boolean satisfiability

SAT

Gegeben eine aussagenlogische Bool'sche Formel, existiert eine Belegung der Variablen mit *wahr* oder *falsch*, die die Formel erfüllt?

Boolean satisfiability

SAT

Gegeben eine aussagenlogische Bool'sche Formel, existiert eine Belegung der Variablen mit *wahr* oder *falsch*, die die Formel erfüllt?

Beispiel

- $x \vee \neg x$ ist erfüllbar, $x \wedge \neg x$ ist nicht erfüllbar

Boolean satisfiability

SAT

Gegeben eine aussagenlogische Bool'sche Formel, existiert eine Belegung der Variablen mit *wahr* oder *falsch*, die die Formel erfüllt?

Beispiel

- $x \vee \neg x$ ist erfüllbar, $x \wedge \neg x$ ist nicht erfüllbar
- $(x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (y \vee \neg z)$ ist erfüllbar mit $x :=$ wahr, $y :=$ wahr, $z :=$ wahr.

Boolean satisfiability

SAT

Gegeben eine aussagenlogische Bool'sche Formel, existiert eine Belegung der Variablen mit *wahr* oder *falsch*, die die Formel erfüllt?

Beispiel

- $x \vee \neg x$ ist erfüllbar, $x \wedge \neg x$ ist nicht erfüllbar
- $(x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (y \vee \neg z)$ ist erfüllbar mit $x :=$ wahr, $y :=$ wahr, $z :=$ wahr.

Satz (Cook–Levin, 1971, 1973)

SAT ist NP-vollständig.

Komplexitätstheorie I

Komplexitätstheorie I

Wir erinnern uns...

Komplexitätstheorie I

Wir erinnern uns...

Die Klasse NP

Eine Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ ist in der Klasse NP, wenn ein Polynom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine polynomialzeit Turingmaschine M existieren, sodass für alle $x \in \{0,1\}^*$ gilt:

$$x \in L \iff \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)} : M(x,u) = 1 \, .$$

Komplexitätstheorie I

Wir erinnern uns...

Die Klasse NP

Eine Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ ist in der Klasse NP, wenn ein Polynom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine polynomialzeit Turingmaschine M existieren, sodass für alle $x \in \{0,1\}^*$ gilt:

$$x \in L \Longleftrightarrow \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)} : M(x,u) = 1 \; .$$

Offenbar ist SAT in NP: Man kann in Polynomialzeit entscheiden, ob eine Belegung korrekt ist.

Wir erinnern uns...

Komplexitätstheorie II

Wir erinnern uns...

Polynomialzeitreduktion

Eine Sprache $L' \subseteq \{0,1\}^*$ ist auf eine Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ polynomiell-reduzierbar, wenn eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ existiert, sodass

$$x \in L' \Longleftrightarrow f(x) \in L$$

für alle $x \in \{0,1\}^*$. Wir schreiben $L' \preceq_p L$.

Wir erinnern uns...

Polynomialzeitreduktion

Eine Sprache $L' \subseteq \{0,1\}^*$ ist auf eine Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ polynomiell-reduzierbar, wenn eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ existiert, sodass

$$x \in L' \Longleftrightarrow f(x) \in L$$

für alle $x \in \{0,1\}^*$. Wir schreiben $L' \preceq_p L$.

NP-vollständig

Eine Sprache $L' \subseteq \{0,1\}^*$ ist NP-vollständig, wenn gilt

- L ist NP-schwer, das heißt, $L' \preceq_p L$ für alle $L' \in \mathrm{NP}$;
- $L \in \mathrm{NP}$.

Wir bemerken:

Der Titel ist nur Clickbait!

Wie löst man SAT?

Wie löst man SAT?

Moderne Algorithmen erweitern den
Davis–Putnam–Logemann–Loveland Algorithmus (1961):
„Intelligentes“ Backtracking.

Wie löst man SAT?

Moderne Algorithmen erweitern den
Davis–Putnam–Logemann–Loveland Algorithmus (1961):
„Intelligentes“ Backtracking.

Verbesserungen durch Conflict-Driven Clause Learning.

Wie löst man SAT?

Moderne Algorithmen erweitern den Davis–Putnam–Logemann–Loveland Algorithmus (1961): „Intelligentes“ Backtracking.

Verbesserungen durch Conflict-Driven Clause Learning.

Satz (Heule–Kullmann–Marek, 2016)

Die Menge $\mathbb{Z}_{>0}$ kann nicht so in zwei disjunkte Teilmengen aufgeteilt werden, dass keine Teilmenge ein Tripel (a, b, c) mit $a^2 + b^2 = c^2$ enthält („boolean Pythagorean Triples problem“).

Wie löst man SAT?

Moderne Algorithmen erweitern den Davis–Putnam–Logemann–Loveland Algorithmus (1961): „Intelligentes“ Backtracking.

Verbesserungen durch Conflict-Driven Clause Learning.

Satz (Heule–Kullmann–Marek, 2016)

Die Menge $\mathbb{Z}_{>0}$ kann nicht so in zwei disjunkte Teilmengen aufgeteilt werden, dass keine Teilmenge ein Tripel (a, b, c) mit $a^2 + b^2 = c^2$ enthält („boolean Pythagorean Triples problem“).

Beweis erfordert 200 TB.

Kaplanskys Vermutungen

Boolean satisfiability

Unit conjecture und SAT

Und jetzt?

Übersetzen nach SAT I

Übersetzen nach SAT I

Sei G eine torsionsfreie Gruppe. Wir wollen $a, b \in \mathbb{F}_2[G]$ mit $ab = 1$ und $a \notin G$ finden.

Übersetzen nach SAT I

Sei G eine torsionsfreie Gruppe. Wir wollen $a, b \in \mathbb{F}_2[G]$ mit $ab = 1$ und $a \notin G$ finden.

Idee: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} = \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$, $+$ entspricht xor, $\cdot$ entspricht $\wedge$.

Übersetzen nach SAT I

Sei G eine torsionsfreie Gruppe. Wir wollen $a, b \in \mathbb{F}_2[G]$ mit $ab = 1$ und $a \notin G$ finden.

Idee: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} = \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$, $+$ entspricht xor, $\cdot$ entspricht $\wedge$.

Übersetze $ab = 1$ in eine SAT-Instanz!

Übersetzen nach SAT I

Sei G eine torsionsfreie Gruppe. Wir wollen $a, b \in \mathbb{F}_2[G]$ mit $ab = 1$ und $a \notin G$ finden.

Idee: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} = \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$, $+$ entspricht xor, $\cdot$ entspricht $\wedge$.

Übersetze $ab = 1$ in eine SAT-Instanz!

Ähnliche Ansätze verwendet zum Beispiel zum Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen.

Übersetzen nach SAT I

Sei G eine torsionsfreie Gruppe. Wir wollen $a, b \in \mathbb{F}_2[G]$ mit $ab = 1$ und $a \notin G$ finden.

Idee: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} = \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$, $+$ entspricht xor, $\cdot$ entspricht $\wedge$.

Übersetze $ab = 1$ in eine SAT-Instanz!

Ähnliche Ansätze verwendet zum Beispiel zum Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen.

Problem: G ist zwar (hoffentlich) endlich erzeugt, aber nicht endlich, also haben wir unendlich viele Variablen!

Übersetzen nach SAT I

Sei G eine torsionsfreie Gruppe. Wir wollen $a, b \in \mathbb{F}_2[G]$ mit $ab = 1$ und $a \notin G$ finden.

Idee: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} = \{\text{falsch}, \text{wahr}\}$, $+$ entspricht xor, $\cdot$ entspricht $\wedge$.

Übersetze $ab = 1$ in eine SAT-Instanz!

Ähnliche Ansätze verwendet zum Beispiel zum Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen.

Problem: G ist zwar (hoffentlich) endlich erzeugt, aber nicht endlich, also haben wir unendlich viele Variablen!

Suche iterativ in $B(n)$, den Bällen von Radius n im Cayley-Graph von G.

Übersetzen nach SAT II

Übersetzen nach SAT II

Für ein fixes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ suchen wir also

$$a = \sum_{g \in B(n)} a_g g, b = \sum_{g \in B(n)} b_g g \in \mathbb{F}_2[G]$$

mit $a \notin G$ und $ab = 1$.

Übersetzen nach SAT II

Für ein fixes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ suchen wir also

$$a = \sum_{g \in B(n)} a_g g, b = \sum_{g \in B(n)} b_g g \in \mathbb{F}_2[G]$$

mit $a \notin G$ und $ab = 1$.

Für $a \notin G$: Brauchen $g, g' \in G$ mit $g \neq g'$ und $a_g = 1 = a_{g'}$.
O.B.d.A. gilt $g = 1$, also ist die zugehörige logische Formel:

$$a_1 \wedge \bigvee_{g \in B(n) \setminus \{1\}} a_g \ .$$

Übersetzen nach SAT III

Übersetzen nach SAT III

Für $ab = 1$: Es gilt

$$ab = \sum_{g \in B(2n)} \Big(\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2} \Big) g \ ,$$

wir wollen also $\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2} = \delta_{1,g}$.

Übersetzen nach SAT III

Für $ab = 1$: Es gilt

$$ab = \sum_{g \in B(2n)} \Big(\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2} \Big) g \ ,$$

wir wollen also $\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2} = \delta_{1,g}$.
Wir führen $|B(n)|^2$ neue Variablen $x_{h_1,h_2} := a_{h_1} b_{h_2}$ ein via der Formel

$$(\neg x_{h_1,h_2} \vee a_{h_1}) \wedge (\neg x_{h_1,h_2} \vee b_{h_2}) \wedge (\neg a_{h_1} \vee \neg b_{h_2} \vee x_{h_1,h_2}) \ .$$

Übersetzen nach SAT III

Für $ab = 1$: Es gilt

$$ab = \sum_{g \in B(2n)} \Big(\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2} \Big) g \ ,$$

wir wollen also $\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2} = \delta_{1,g}$.
Wir führen $|B(n)|^2$ neue Variablen $x_{h_1,h_2} := a_{h_1} b_{h_2}$ ein via der Formel

$$(\neg x_{h_1,h_2} \vee a_{h_1}) \wedge (\neg x_{h_1,h_2} \vee b_{h_2}) \wedge (\neg a_{h_1} \vee \neg b_{h_2} \vee x_{h_1,h_2}) \ .$$

Die Gleichungen $\sum_{h_1 h_2 = g} x_{h_1,h_2} = \delta_{1,g}$ werden jetzt weiter aufgebrochen und übersetzt.

Übersetzen nach SAT III

Für $ab = 1$: Es gilt

$$ab = \sum_{g \in B(2n)} \Big(\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2} \Big) g \ ,$$

wir wollen also $\sum_{h_1 h_2 = g} a_{h_1} b_{h_2} = \delta_{1,g}$.
Wir führen $|B(n)|^2$ neue Variablen $x_{h_1,h_2} := a_{h_1} b_{h_2}$ ein via der Formel

$$(\neg x_{h_1,h_2} \vee a_{h_1}) \wedge (\neg x_{h_1,h_2} \vee b_{h_2}) \wedge (\neg a_{h_1} \vee \neg b_{h_2} \vee x_{h_1,h_2}) \ .$$

Die Gleichungen $\sum_{h_1 h_2 = g} x_{h_1,h_2} = \delta_{1,g}$ werden jetzt weiter aufgebrochen und übersetzt. Zum Beispiel wird $x + y + z = 0$ zu

$$(\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \ .$$

Kaplanskys Vermutungen

Boolean satisfiability

Unit conjecture und SAT

Und jetzt?

Und jetzt?

Und jetzt?

Gibt es mehr Gegenbeispiele für die unit conjecture? Auch in Charakteristik 0?

Und jetzt?

Gibt es mehr Gegenbeispiele für die unit conjecture? Auch in Charakteristik 0?

Kann man für die anderen Vermutungen auch Gegenbeispiele finden? Für zero-divisor conjecture ändert sich nur „ein Bit“: $\sum_{h_1 h_2 = 1} x_{h_1, h_2} = 0$.

Und jetzt?

Gibt es mehr Gegenbeispiele für die unit conjecture? Auch in Charakteristik 0?

Kann man für die anderen Vermutungen auch Gegenbeispiele finden? Für zero-divisor conjecture ändert sich nur „ein Bit“: $\sum_{h_1 h_2 = 1} x_{h_1,h_2} = 0$.

Kann man allgemeine Strukturaussagen für $K[G]^\times$ beweisen?