Seminar Darstellungstheorie
und darüber hinaus

Köchervarietäten

Johannes Schmitt
TU Kaiserslautern
17. März 2022

McKay-Korrespondenz

McKay-Korrespondenz

Wir “erinnern” uns...

McKay-Korrespondenz

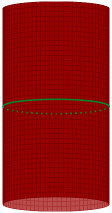
Wir “erinnern” uns...

Für $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ endlich hat der Quotient $\mathbb{C}^2/G$ eine symplektische Auflösung.

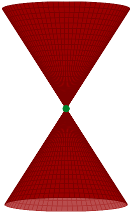
McKay-Korrespondenz

Wir “erinnern” uns...

Für $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ endlich hat der Quotient $\mathbb{C}^2/G$ eine symplektische Auflösung.



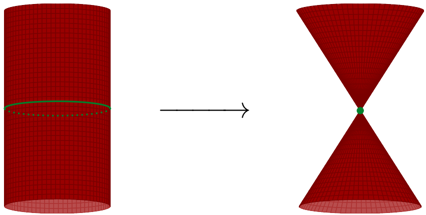
$\longrightarrow$



McKay-Korrespondenz

Wir "erinnern" uns...

Für $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ endlich hat der Quotient $\mathbb{C}^2/G$ eine symplektische Auflösung.



Diese korrespondieren zu Dynkindiagrammen.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Lineare Quotienten} \\ \text{und Auflösungen} \end{array} \right\} \leftrightarrow \{\text{Graphen}\}$$

McKay-Korrespondenz

Köcher und ihre Darstellungen

Etwas GIT

Köchervarietäten

Köcher

Köcher

Definition

Ein Köcher $\vec{Q}$ besteht aus zwei endlichen Mengen I ("Knoten") und E ("Kanten") und zwei Abbildungen $s, t : E \to V$.

Köcher

Definition

Ein Köcher $\vec{Q}$ besteht aus zwei endlichen Mengen I ("Knoten") und E ("Kanten") und zwei Abbildungen $s, t : E \to V$.

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

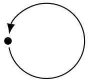
Köcher

Definition

Ein Köcher $\vec{Q}$ besteht aus zwei endlichen Mengen I ("Knoten") und E ("Kanten") und zwei Abbildungen $s, t : E \to V$.

Definition

Eine Darstellung V eines Köchers $\vec{Q}$ über einem Körper K besteht aus einem Vektorraum V_i für jedes $i \in I$ und einer linearen Abbildung $x_e : V_{s(e)} \to V_{t(e)}$ für jedes $e \in E$.



Köcher

Definition

Ein Köcher $\vec{Q}$ besteht aus zwei endlichen Mengen I ("Knoten") und E ("Kanten") und zwei Abbildungen $s, t : E \to V$.

Definition

Eine Darstellung V eines Köchers $\vec{Q}$ über einem Körper K besteht aus einem Vektorraum V_i für jedes $i \in I$ und einer linearen Abbildung $x_e : V_{s(e)} \to V_{t(e)}$ für jedes $e \in E$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "x_1"'] & V_0 & V_2 \arrow[l, "x_2"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_1 \arrow[loop right, "x_1"] \end{tikzcd}$$

Köcher

Definition

Ein Köcher $\vec{Q}$ besteht aus zwei endlichen Mengen I ("Knoten") und E ("Kanten") und zwei Abbildungen $s, t : E \to V$.

Definition

Eine Darstellung V eines Köchers $\vec{Q}$ über einem Körper K besteht aus einem Vektorraum V_i für jedes $i \in I$ und einer linearen Abbildung $x_e : V_{s(e)} \to V_{t(e)}$ für jedes $e \in E$.

Definition

Ein Morphismus $\varphi : V \to W$ von Darstellungen V, W eines Köchers $\vec{Q}$ besteht aus linearen Abbildungen $\varphi_i : V_i \to W_i$, die mit den x_e kommutieren.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "x_1"'] & V_0 & V_2 \arrow[l, "x_2"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_1 \arrow[loop right, "x_1"] \end{tikzcd}$$

Köcher

Definition

Ein Köcher $\vec{Q}$ besteht aus zwei endlichen Mengen I ("Knoten") und E ("Kanten") und zwei Abbildungen $s, t : E \to V$.

Definition

Eine Darstellung V eines Köchers $\vec{Q}$ über einem Körper K besteht aus einem Vektorraum V_i für jedes $i \in I$ und einer linearen Abbildung $x_e : V_{s(e)} \to V_{t(e)}$ für jedes $e \in E$.

Definition

Ein Morphismus $\varphi : V \to W$ von Darstellungen V, W eines Köchers $\vec{Q}$ besteht aus linearen Abbildungen $\varphi_i : V_i \to W_i$, die mit den x_e kommutieren.*

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "x_1"'] & V_0 & V_2 \arrow[l, "x_2"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_1 \arrow[loop right, "x_1"] \end{tikzcd}$$

* Auf eine präzise Definition wird zur Wahrung der Lesbarkeit verzichtet.

Beispiel

Beispiel

Sei der Köcher $\vec{Q}$ mit Darstellung V gegeben durch:

$$\overset{V_1}{\bullet} \xrightarrow[x_1]{} \overset{V_0}{\bullet} \xleftarrow[x_2]{} \overset{V_2}{\bullet}$$

Beispiel

Sei der Köcher $\vec{Q}$ mit Darstellung V gegeben durch:

$$\begin{tikzcd} \underset{\bullet}{V_1} \arrow[r, "x_1"'] & \underset{\bullet}{V_0} & \underset{\bullet}{V_2} \arrow[l, "x_2"] \end{tikzcd}$$

Klassifiziere alle Darstellungen von $\vec{Q}$:

Beispiel

Sei der Köcher $\vec{Q}$ mit Darstellung V gegeben durch:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "x_1"'] & V_0 & V_2 \arrow[l, "x_2"] \end{tikzcd}$$

Klassifiziere alle Darstellungen von $\vec{Q}$:

Schreibe $V_1 = \ker x_1 \oplus V_1'$ und $V_2 = \ker x_2 \oplus V_2'$, also

$$V = n_1 S(1) \oplus n_2 S(2) \oplus V' \ .$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & 0 & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 & K \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$S(1)$ $\qquad$ $S(2)$

Beispiel

Sei der Köcher $\vec{Q}$ mit Darstellung V gegeben durch:

$$\begin{tikzcd} \underset{V_1}{\bullet} \arrow[r, "x_1"'] & \underset{V_0}{\bullet} & \underset{V_2}{\bullet} \arrow[l, "x_2"] \end{tikzcd}$$

Klassifiziere alle Darstellungen von $\vec{Q}$:

Schreibe $V_1 = \ker x_1 \oplus V_1'$ und $V_2 = \ker x_2 \oplus V_2'$, also

$$V = n_1 S(1) \oplus n_2 S(2) \oplus V' \ .$$

Der Raum V' korrespondiert zu Vektorräumen V_0, V_1, V_2 mit $V_1, V_2 \leq V_0$. Damit ist V isomorph zu einer direkten Summe von:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & 0 & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 & K \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$S(1) \qquad\qquad S(2)$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & K & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K & K \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r] & K & K \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Raum der Darstellungen

Raum der Darstellungen

Sei V eine Darstellung des Köchers $\vec{Q}$ und $n_i := \dim_K V_i$.

Raum der Darstellungen

Sei V eine Darstellung des Köchers $\vec{Q}$ und $n_i := \dim_K V_i$.

Dann korrespondiert V zu einem Vektor in

$$R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) = \bigoplus_{e \in E} \mathrm{Hom}_K(K^{n_{s(e)}}, K^{n_{t(e)}}) \;,$$

dem Raum der Darstellungen von $\vec{Q}$, wobei $\boldsymbol{n} := (n_i)_{i \in I}$.

Raum der Darstellungen

Sei V eine Darstellung des Köchers $\vec{Q}$ und $n_i := \dim_K V_i$.

Dann korrespondiert V zu einem Vektor in

$$R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) = \bigoplus_{e \in E} \mathrm{Hom}_K(K^{n_{s(e)}}, K^{n_{t(e)}}) \;,$$

dem Raum der Darstellungen von $\vec{Q}$, wobei $\boldsymbol{n} := (n_i)_{i \in I}$.

Auf $R(\vec{Q}, \boldsymbol{n})$ operiert die Gruppe

$$\mathrm{GL}(\boldsymbol{n}) := \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i, K)$$

per Konjugation.

Raum der Darstellungen

Sei V eine Darstellung des Köchers $\vec{Q}$ und $n_i := \dim_K V_i$.

Dann korrespondiert V zu einem Vektor in

$$R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) = \bigoplus_{e \in E} \mathrm{Hom}_K\left(K^{n_{s(e)}}, K^{n_{t(e)}}\right) ,$$

dem Raum der Darstellungen von $\vec{Q}$, wobei $\boldsymbol{n} := (n_i)_{i \in I}$.

Auf $R(\vec{Q}, \boldsymbol{n})$ operiert die Gruppe

$$\mathrm{GL}(\boldsymbol{n}) := \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(n_i, K)$$

per Konjugation.

Satz

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Isomorphismenklassen von} \\ \text{Darstellungen von Dimension } \boldsymbol{n} \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \mathrm{GL}(\boldsymbol{n})\text{-Bahnen in } R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) \right\} .$$

Kategorielle Quotienten

Kategorielle Quotienten

Sei G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Kategorielle Quotienten

Sei G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Der kategorielle Quotient von X und G ist die Abbildung

$$X \to X//G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]^G$$

induziert durch die Einbettung

$$\mathbb{C}[X]^G = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g.x) = f(x) \ \forall x \in X, g \in G\} \subseteq \mathbb{C}[X] \,.$$

Kategorielle Quotienten

Sei G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Der kategorielle Quotient von X und G ist die Abbildung

$$X \to X//G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]^G$$

induziert durch die Einbettung

$$\mathbb{C}[X]^G = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g.x) = f(x)\ \forall x \in X, g \in G\} \subseteq \mathbb{C}[X]\,.$$

Beispiel

Die Gruppe $G_{\boldsymbol{a}} := (\mathbb{C}, +)$ operiert auf $\mathbb{C}[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$. Also gilt $\mathbb{C}[x, y]^{G_{\boldsymbol{a}}} = \mathbb{C}[x]$ und der Quotient ist die Projektion $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}},\ (v, w) \mapsto v$.

Kategorielle Quotienten

Sei G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Der kategorielle Quotient von X und G ist die Abbildung

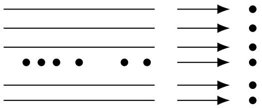
$$X \to X//G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]^G$$

induziert durch die Einbettung

$$\mathbb{C}[X]^G = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g.x) = f(x)\ \forall x \in X, g \in G\} \subseteq \mathbb{C}[X]\,.$$

Beispiel

Die Gruppe $G_{\boldsymbol{a}} := (\mathbb{C}, +)$ operiert auf $\mathbb{C}[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$. Also gilt $\mathbb{C}[x, y]^{G_a} = \mathbb{C}[x]$ und der Quotient ist die Projektion $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}},\ (v, w) \mapsto v$.



Beispiel

Beispiel

Sei $\vec{Q} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$ und $\boldsymbol{n} = (n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

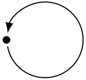
Beispiel

Sei $\vec{Q} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$ und $\boldsymbol{n} = (n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dann ist $R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ und

$$R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) /\!/ \mathrm{GL}(\boldsymbol{n}) = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} .$$

Beispiel

Sei $\vec{Q} =$  und $\boldsymbol{n} = (n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dann ist $R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ und

$$R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) /\!/ \mathrm{GL}(\boldsymbol{n}) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} .$$

Ein klassisches Resultat der Invariantentheorie:

$$\mathbb{C}[\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]^{S_n} \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

Beispiel

Sei $\vec{Q} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$ und $\boldsymbol{n} = (n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dann ist $R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ und

$$R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) /\!/ \mathrm{GL}(\boldsymbol{n}) = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \; .$$

Ein klassisches Resultat der Invariantentheorie:

$$\mathbb{C}[\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]^{S_n} \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

Also

$$R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) /\!/ \mathrm{GL}(\boldsymbol{n}) \cong \mathbb{C}^n \; .$$

Proj

Proj

Wir alle kennen Spec: Einer "ausreichend netten" Algebra wird eine affine Varietät zugeordnet.

Proj

Wir alle kennen Spec: Einer “ausreichend netten” Algebra wird eine affine Varietät zugeordnet.

Jetzt projektiv:

Proj

Wir alle kennen Spec: Einer “ausreichend netten” Algebra wird eine affine Varietät zugeordnet.

Jetzt projektiv: Für eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ sei

$$\operatorname{Proj} A := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \text{ homogen}, \bigoplus_{d \geq 1} A_d \not\subseteq P\} .$$

Proj

Wir alle kennen Spec: Einer "ausreichend netten" Algebra wird eine affine Varietät zugeordnet.

Jetzt projektiv: Für eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ sei

$$\operatorname{Proj} A := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \text{ homogen, } \bigoplus_{d \geq 1} A_d \not\subseteq P\} \, .$$

Beispiel: $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Proj

Wir alle kennen Spec: Einer "ausreichend netten" Algebra wird eine affine Varietät zugeordnet.

Jetzt projektiv: Für eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ sei

$$\operatorname{Proj} A := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \text{ homogen}, \bigoplus_{d \geq 1} A_d \not\subseteq P\} .$$

Beispiel: $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Es gibt einen projektiven Morphismus $\operatorname{Proj} A \to \operatorname{Spec} A_0$ induziert durch $A_0 \subseteq A$.

Proj

Wir alle kennen Spec: Einer “ausreichend netten” Algebra wird eine affine Varietät zugeordnet.

Jetzt projektiv: Für eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ sei

$$\operatorname{Proj} A := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \text{ homogen}, \bigoplus_{d \geq 1} A_d \not\subseteq P\} .$$

Beispiel: $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Es gibt einen projektiven Morphismus $\operatorname{Proj} A \to \operatorname{Spec} A_0$ induziert durch $A_0 \subseteq A$.

Beispiel: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \to \operatorname{Spec} \mathbb{C} = \{\mathrm{pt}\}$

Twisted GIT

Twisted GIT

Sei wieder G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert, und sei χ ein Charakter von G also ein Morphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$.

Twisted GIT

Sei wieder G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert, und sei χ ein Charakter von G also ein Morphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$.

Definiere

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g.x) = \chi(g)f(x) \ \forall x \in X, g \in G\},$$

die relativen Invarianten.

Twisted GIT

Sei wieder G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert, und sei χ ein Charakter von G also ein Morphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$.

Definiere

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g.x) = \chi(g)f(x) \ \forall x \in X, g \in G\} \ ,$$

die relativen Invarianten.

Dann ist $A := \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n}$ eine graduierte Algebra und wir erhalten den "twisted GIT quotient"

$$X//_\chi G := \operatorname{Proj} \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n} \ .$$

Twisted GIT

Sei wieder G eine reduktive algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert, und sei χ ein Charakter von G also ein Morphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$.

Definiere

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi} = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(g.x) = \chi(g)f(x)\ \forall x \in X, g \in G\}\ ,$$

die relativen Invarianten.

Dann ist $A := \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n}$ eine graduierte Algebra und wir erhalten den "twisted GIT quotient"

$$X//_\chi G := \operatorname{Proj} \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,\chi^n}\ .$$

Wegen $A_0 = \mathbb{C}[X]^G$ ist $X//_\chi G$ projektiv über $X//G$.

Beispiel

Beispiel

Sei $G := \mathbb{C}^\times$, $X := \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ und die Operation von G auf X gegeben durch

$$\lambda.(a_0, \ldots, a_n) := (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$$

für $\lambda \in G$ und $(a_0, \ldots, a_n) \in X$.

Beispiel

Sei $G := \mathbb{C}^\times$, $X := \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ und die Operation von G auf X gegeben durch

$$\lambda.(a_0, \ldots, a_n) := (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$$

für $\lambda \in G$ und $(a_0, \ldots, a_n) \in X$. Sei $\chi := \mathrm{id}_G$.

Beispiel

Sei $G := \mathbb{C}^\times$, $X := \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ und die Operation von G auf X gegeben durch

$$\lambda.(a_0, \ldots, a_n) := (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$$

für $\lambda \in G$ und $(a_0, \ldots, a_n) \in X$. Sei $\chi := \mathrm{id}_G$.
Dann gilt

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi^k} = \{f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \mid f \text{ homogen von Grad } k\} .$$

Beispiel

Sei $G := \mathbb{C}^\times$, $X := \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ und die Operation von G auf X gegeben durch

$$\lambda.(a_0, \ldots, a_n) := (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$$

für $\lambda \in G$ und $(a_0, \ldots, a_n) \in X$. Sei $\chi := \mathrm{id}_G$.
Dann gilt

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi^k} = \{f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \mid f \text{ homogen von Grad } k\} .$$

Also ist

$$\bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,\chi^k} = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$$

mit der Standardgraduierung.

Beispiel

Sei $G := \mathbb{C}^\times$, $X := \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ und die Operation von G auf X gegeben durch

$$\lambda.(a_0, \dots, a_n) := (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$$

für $\lambda \in G$ und $(a_0, \dots, a_n) \in X$. Sei $\chi := \mathrm{id}_G$.
Dann gilt

$$\mathbb{C}[X]^{G,\chi^k} = \{ f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \mid f \text{ homogen von Grad } k \} \ .$$

Also ist

$$\bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[X]^{G,\chi^k} = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$$

mit der Standardgraduierung.

Damit gilt

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1} /\!/_{\mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}} \mathbb{C}^\times = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \ .$$

McKay-Korrespondenz

Köcher und ihre Darstellungen

Etwas GIT

Köchervarietäten

Köchervarietäten

Köchervarietäten

Für einen Köcher $\vec{Q}$ sei $\overline{Q}$ der "gedoppelte" Köcher.[†]

[†] Auf eine präsize Definition wird zur Wahrung der Lesbarkeit verzichtet.

Köchervarietäten

Für einen Köcher $\vec{Q}$ sei $\overline{Q}$ der "gedoppelte" Köcher.†

Dann gilt

$$R(\overline{Q}, \boldsymbol{n}) = R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) \oplus R(\vec{Q}, \boldsymbol{n})^* \ .$$

† Auf eine präzise Definition wird zur Wahrung der Lesbarkeit verzichtet.

Köchervarietäten

Für einen Köcher $\vec{Q}$ sei $\overline{Q}$ der "gedoppelte" Köcher.[†]

Dann gilt

$$R(\overline{Q}, \boldsymbol{n}) = R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) \oplus R(\vec{Q}, \boldsymbol{n})^* \ .$$

Es gibt eine sogenannte Impulsabbildung

$$\mu_{\boldsymbol{n}} : R(\overline{Q}, \boldsymbol{n}) \to \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{gl}(n_i, \mathbb{C}), z \mapsto \sum_{e \in E} [z_e, z_{\overline{e}}] \ .$$

[†] Auf eine präzise Definition wird zur Wahrung der Lesbarkeit verzichtet.

Köchervarietäten

Für einen Köcher $\vec{Q}$ sei $\overline{Q}$ der "gedoppelte" Köcher.[†]

Dann gilt

$$R(\overline{Q}, \boldsymbol{n}) = R(\vec{Q}, \boldsymbol{n}) \oplus R(\vec{Q}, \boldsymbol{n})^* \ .$$

Es gibt eine sogenannte Impulsabbildung

$$\mu_{\boldsymbol{n}} : R(\overline{Q}, \boldsymbol{n}) \to \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{gl}(n_i, \mathbb{C}), z \mapsto \sum_{e \in E} [z_e, z_{\overline{e}}] \ .$$

Wir nennen

$$\mathcal{M}_0(\boldsymbol{n}) := \mu_{\boldsymbol{n}}^{-1}(0) // \mathrm{GL}(\boldsymbol{n})$$

eine Köchervarietät.

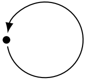
[†] Auf eine präzise Definition wird zur Wahrung der Lesbarkeit verzichtet.

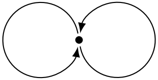
Beispiel

Beispiel

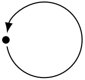
Sei $\vec{Q} = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$ und $\boldsymbol{n} = (n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

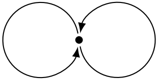
Beispiel

Sei $\vec{Q} =$  und $\boldsymbol{n} = (n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dann ist $\overline{Q} =$  und $R(\overline{Q}, \boldsymbol{n}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$.

Beispiel

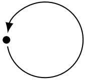
Sei $\vec{Q} =$  und $\boldsymbol{n} = (n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

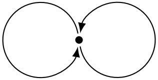
Dann ist $\overline{Q} =$  und $R(\overline{Q}, \boldsymbol{n}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$.

Außerdem

$$\mu_{\boldsymbol{n}}^{-1}(0) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n),\ [x, y] = 0\} .$$

Beispiel

Sei $\vec{Q} =$  und $\boldsymbol{n} = (n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dann ist $\overline{Q} =$  und $R(\overline{Q}, \boldsymbol{n}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$.

Außerdem

$$\mu_{\boldsymbol{n}}^{-1}(0) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n),\ [x, y] = 0\} \,.$$

Kommutierende Matrizen können simultan diagonalisiert werden, also ist

$$A := \mathbb{C}[\mu_{\boldsymbol{n}}^{-1}(0)]^{\mathrm{GL}(\boldsymbol{n})} \cong \mathbb{C}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \nu_1, \ldots, \nu_n]^{S_n}$$

und

$$\mathcal{M}_0 = \mathrm{Spec}\, A = \mathbb{C}^{2n}/S_n \,.$$

Beispiel

Beispiel

Sei jetzt $n = 2$, also

$$A = \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2]^{S_2} \; ,$$

wobei S_2 operiert via $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ und $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$.

Beispiel

Sei jetzt $n = 2$, also

$$A = \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2]^{S_2} ,$$

wobei S_2 operiert via $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ und $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$.

Damit gilt

$$A \cong \mathbb{C}[x, y] \otimes \mathbb{C}[s, t]^{C_2} ,$$

wobei C_2 operiert via $s \to -s$ und $t \to -t$.

Beispiel

Sei jetzt $n = 2$, also

$$A = \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2]^{S_2} \ ,$$

wobei S_2 operiert via $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ und $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$.

Damit gilt

$$A \cong \mathbb{C}[x, y] \otimes \mathbb{C}[s, t]^{C_2} \ ,$$

wobei C_2 operiert via $s \to -s$ und $t \to -t$.

Also

$$A \cong \mathbb{C}[x, y, u, v, w]/(uv - w^2)$$

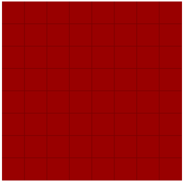
und

$$\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}^2 \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[u, v, w]/(uv - w^2) \ .$$

Beispiel

Sei jetzt $n = 2$, also

$$A = \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2]^{S_2} ,$$



wobei S_2 operiert via $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ und $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$.

Damit gilt

$$A \cong \mathbb{C}[x, y] \otimes \mathbb{C}[s, t]^{C_2} ,$$

wobei C_2 operiert via $s \to -s$ und $t \to -t$.

Also

$$A \cong \mathbb{C}[x, y, u, v, w]/(uv - w^2)$$

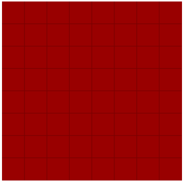
und

$$\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}^2 \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[u, v, w]/(uv - w^2) .$$

Beispiel

Sei jetzt $n = 2$, also

$$A = \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2]^{S_2} \ ,$$

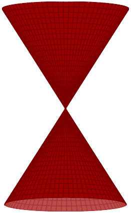


wobei S_2 operiert via $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ und $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$.

Damit gilt

$$A \cong \mathbb{C}[x, y] \otimes \mathbb{C}[s, t]^{C_2} \ ,$$

wobei C_2 operiert via $s \to -s$ und $t \to -t$.



Also

$$A \cong \mathbb{C}[x, y, u, v, w]/(uv - w^2)$$

und

$$\mathcal{M}_0 = \mathbb{C}^2 \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[u, v, w]/(uv - w^2) \ .$$

$0 \to \vartheta$

$0 \to \vartheta$

Jedes $\vartheta \in \mathbb{Z}^{I}$ definiert einen Charakter χ_ϑ von $\mathrm{GL}(\boldsymbol{n})$ durch

$$\chi_\vartheta : \mathrm{GL}(\boldsymbol{n}) \to \mathbb{C}^\times,\ g \mapsto \prod_{i \in I} \det(g_i)^{-\vartheta_i}\ .$$

$0 \to \vartheta$

Jedes $\vartheta \in \mathbb{Z}^I$ definiert einen Charakter χ_ϑ von $\mathsf{GL}(\boldsymbol{n})$ durch

$$\chi_\vartheta : \mathsf{GL}(\boldsymbol{n}) \to \mathbb{C}^\times,\ g \mapsto \prod_{i \in I} \det(g_i)^{-\vartheta_i} .$$

Damit erhalten wir die Köchervarietät

$$\mathcal{M}_\vartheta(\boldsymbol{n}) = \mu_{\boldsymbol{n}}^{-1}(0) /\!/_{\chi_\vartheta} \mathsf{GL}(\boldsymbol{n}) .$$

$0 \to \vartheta$

Jedes $\vartheta \in \mathbb{Z}^{\boldsymbol{I}}$ definiert einen Charakter χ_ϑ von $\mathrm{GL}(\boldsymbol{n})$ durch

$$\chi_\vartheta : \mathrm{GL}(\boldsymbol{n}) \to \mathbb{C}^\times,\ g \mapsto \prod_{i \in I} \det(g_i)^{-\vartheta_i}\ .$$

Damit erhalten wir die Köchervarietät

$$\mathcal{M}_\vartheta(\boldsymbol{n}) = \mu_{\boldsymbol{n}}^{-1}(0)//_{\chi_\vartheta}\mathrm{GL}(\boldsymbol{n})\ .$$

Satz

Für gewisse ("$\boldsymbol{n}$-generische") $\vartheta \in \mathbb{Z}^{\boldsymbol{I}}$, ist $\mathcal{M}_\vartheta(\boldsymbol{n})$ glatt.
Insbesondere ist $\mathcal{M}_\vartheta(\boldsymbol{n})$ eine symplektische Auflösung für $\mathcal{M}_0(\boldsymbol{n})$.