McKay Korrespondenzen

Johannes Schmitt
TU Kaiserslautern
26. November 2020

Miles Reid: “La correspondance de McKay”.

Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000. Astérisque No. 276 (2002), 53-72.

Alastair Craw: “The McKay correspondence and representations of the McKay quiver”.

PhD-Thesis, University of Warwick, 2001.

Prinzip (Reid)

Let M be an algebraic manifold, G be a group of automorphisms of M, and $Y \to X$ a resolution of singularities of X. Then the answer to any well posed question about the geometry of Y is the G-equivariant geometry of M.

Klein'sche Singularitäten

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe.

Klein'sche Singularitäten

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe. Dann ist G konjugiert zu einer der folgenden Gruppen:

- die zyklische Gruppe $\mathrm{C}_m = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$ mit Ordnung m,
- die binäre Dieder Gruppe $\mathrm{D}_m = \left\langle \mathrm{C}_{2m}, \begin{pmatrix} 0 & \zeta_4 \\ \zeta_4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ mit Ordnung $4m$,
- die Gruppen T („Tetraeder"), O („Oktaeder") und I („Ikosaeder") der Ordnung 24, 48 und 120.

Klein'sche Singularitäten

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe. Dann ist G konjugiert zu einer der folgenden Gruppen:

- die zyklische Gruppe $\mathrm{C}_m = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$ mit Ordnung m,
- die binäre Dieder Gruppe $\mathrm{D}_m = \left\langle \mathrm{C}_{2m}, \begin{pmatrix} 0 & \zeta_4 \\ \zeta_4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ mit Ordnung $4m$,
- die Gruppen T („Tetraeder"), O („Oktaeder") und I („Ikosaeder") der Ordnung 24, 48 und 120.

Man nennt den Quotient $\mathbb{C}^2/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y]^G$ eine Klein'sche Singularität (oder Du Val Singularität oder simple surface singularity oder rational double point...).

Klein'sche Singularitäten

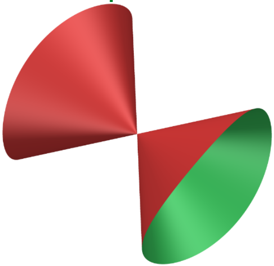
Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe. Dann ist G konjugiert zu einer der folgenden Gruppen:

- die zyklische Gruppe $\mathrm{C}_m = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_m & 0 \\ 0 & \zeta_m^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$ mit Ordnung m,
- die binäre Dieder Gruppe $\mathrm{D}_m = \left\langle \mathrm{C}_{2m}, \begin{pmatrix} 0 & \zeta_4 \\ \zeta_4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ mit Ordnung $4m$,
- die Gruppen T („Tetraeder"), O („Oktaeder") und I („Ikosaeder") der Ordnung 24, 48 und 120.

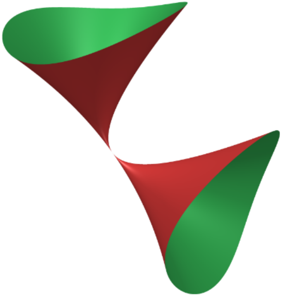
Man nennt den Quotient $\mathbb{C}^2/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]^G$ eine Klein'sche Singularität (oder Du Val Singularität oder simple surface singularity oder rational double point...).

Man kann diese Quotienten in $\mathbb{C}^3$ einbetten mit einer isolierten Singularität im Ursprung.

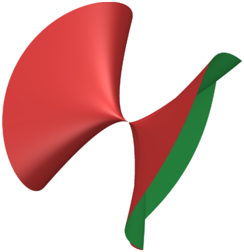
Reelle Impressionen



C_2



D_1



O

ADE Klassifikation

Satz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ endlich und $Y \to \mathbb{C}^2/G$ eine minimale Auflösung von Singularitäten. Dann entspricht der Graph der Auflösung einem Dynkin-Diagramm von Typ A, D oder E.

ADE Klassifikation

Satz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ endlich und $Y \to \mathbb{C}^2/G$ eine minimale Auflösung von Singularitäten. Dann entspricht der Graph der Auflösung einem Dynkin-Diagramm von Typ A, D oder E.

Genauer:

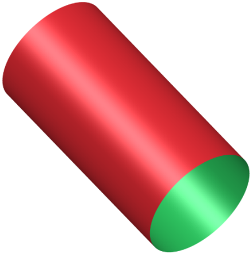
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}_n & \to & A_{n-1} \\ \mathrm{D}_n & \to & D_{n+2} \\ \mathrm{T} & \to & E_6 \\ \mathrm{O} & \to & E_7 \\ \mathrm{I} & \to & E_8 \end{array}$$

ADE Klassifikation

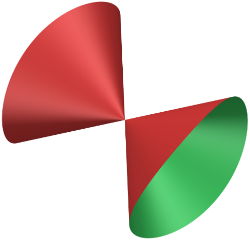
Satz

Sei $G \leq SL_2(\mathbb{C})$ endlich und $Y \to \mathbb{C}^2/G$ eine minimale Auflösung von Singularitäten. Dann entspricht der Graph der Auflösung einem Dynkin-Diagramm von Typ A, D oder E.

Triviales Beispiel



$\longrightarrow$



ADE Klassifikation

Beispiel

Sei $G = \mathrm{D}_2$.

ADE Klassifikation

Beispiel

Sei $G = \mathrm{D}_2$. Einmal Aufblasen ergibt eine exzeptionelle Kurve mit drei "neuen" Singularitäten.

ADE Klassifikation

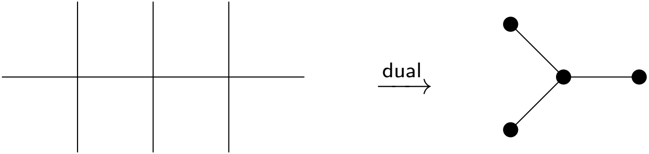
Beispiel

Sei $G = \mathrm{D}_2$. Einmal Aufblasen ergibt eine exzeptionelle Kurve mit drei “neuen” Singularitäten. Aufblasen von diesen ergibt drei weiter exzeptionelle Kurven und eine glatte Varietät.

ADE Klassifikation

Beispiel

Sei $G = \mathrm{D}_2$. Einmal Aufblasen ergibt eine exzeptionelle Kurve mit drei "neuen" Singularitäten. Aufblasen von diesen ergibt drei weiter exzeptionelle Kurven und eine glatte Varietät. Der Graph ist also:



Klassische McKay-Korrespondenz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe.

Klassische McKay-Korrespondenz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe. Seien $\rho_0, \ldots, \rho_n$ die irreduziblen Darstellungen von G, wobei ρ_0 trivial.

Klassische McKay-Korrespondenz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe. Seien $\rho_0, \ldots, \rho_n$ die irreduziblen Darstellungen von G, wobei ρ_0 trivial. Für jedes $0 \leq j \leq n$ zerlegt sich $\mathbb{C}^2 \otimes \rho_j$ in Irreduzible

$$\mathbb{C}^2 \otimes \rho_j = \bigoplus_{i=0}^{n} a_{ij} \rho_i$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Klassische McKay-Korrespondenz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe. Seien $\rho_0, \ldots, \rho_n$ die irreduziblen Darstellungen von G, wobei ρ_0 trivial. Für jedes $0 \leq j \leq n$ zerlegt sich $\mathbb{C}^2 \otimes \rho_j$ in Irreduzible

$$\mathbb{C}^2 \otimes \rho_j = \bigoplus_{i=0}^{n} a_{ij} \rho_i$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definition

Der McKay Köcher von G ist der gerichtete Graph mit Knotenmenge $\{0, \ldots, n\}$ und a_{ij} Pfeilen von i nach j.

Klassische McKay-Korrespondenz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Gruppe. Seien $\rho_0, \ldots, \rho_n$ die irreduziblen Darstellungen von G, wobei ρ_0 trivial. Für jedes $0 \leq j \leq n$ zerlegt sich $\mathbb{C}^2 \otimes \rho_j$ in Irreduzible

$$\mathbb{C}^2 \otimes \rho_j = \bigoplus_{i=0}^{n} a_{ij} \rho_i$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definition

Der McKay Köcher von G ist der gerichtete Graph mit Knotenmenge $\{0, \ldots, n\}$ und a_{ij} Pfeilen von i nach j.

Satz (McKay, 1980)

Entfernt man im McKay Köcher von G den Knoten 0 erhält man das entsprechende Dynkin-Diagramm der minimalen Auflösung.

Klassische McKay-Korrespondenz

Beispiel

Die Gruppe $G = \mathrm{D}_2$ hat 5 irreduzible Darstellungen.

Klassische McKay-Korrespondenz

Beispiel

Die Gruppe $G = \mathrm{D}_2$ hat 5 irreduzible Darstellungen. Man erhält den folgenden McKay Köcher:

$$
\begin{tikzcd}
 & \rho_0 \arrow[d, bend right] & \\
\rho_3 \arrow[r, bend right] & \rho_4 \arrow[u, bend right] \arrow[l, bend right] \arrow[r, bend right] \arrow[d, bend right] & \rho_1 \arrow[l, bend right] \\
 & \rho_2 \arrow[u, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

Klassische McKay-Korrespondenz

Beispiel

Die Gruppe $G = \mathrm{D}_2$ hat 5 irreduzible Darstellungen. Man erhält den folgenden McKay Köcher:

$$
\begin{tikzcd}
 & \rho_0 \arrow[d, bend right] & \\
\rho_3 \arrow[r, bend right] & \rho_4 \arrow[l, bend right] \arrow[u, bend right] \arrow[r, bend right] \arrow[d, bend right] & \rho_1 \arrow[l, bend right] \\
 & \rho_2 \arrow[u, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

Klassische McKay-Korrespondenz

Und jetzt für Fortgeschrittene:

Satz (McKay, 1980)

Für $G \leq \mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$ endlich und eine minimale Auflösung $Y \to \mathbb{C}^2/G$ existiert eine Bijektion

$$\{\text{irreduzible Darstellungen von } G\} \xleftrightarrow{\sim} \text{Basis von } H_*(Y, \mathbb{Z}) \ .$$

Grundprinzip

Klassisch

Physik

Höhere Dimensionen

Physik

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und G eine endliche Gruppe, die auf M operiert.

Physik

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und G eine endliche Gruppe, die auf M operiert.
Dixon et al. definieren eine "orbifold Euler number" $e(M, G)$ für M und G. Hat wohl was mit String Theorie zu tun...

Physik

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und G eine endliche Gruppe, die auf M operiert.
Dixon et al. definieren eine "orbifold Euler number" $e(M,G)$ für M und G. Hat wohl was mit String Theorie zu tun...

Vermutung (Dixon et al., 1986)

Existiert eine crepante Auflösung $Y \to M/G$, so ist $e(M,G)$ gleich der topologischen Euler Zahl

$$\chi(Y) := \sum_i (-1)^i \dim H_i(Y, \mathbb{Z}) \ .$$

Physik

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und G eine endliche Gruppe, die auf M operiert.
Dixon et al. definieren eine "orbifold Euler number" $e(M, G)$ für M und G. Hat wohl was mit String Theorie zu tun...

Vermutung (Dixon et al., 1986)

Existiert eine crepante Auflösung $Y \to M/G$, so ist $e(M, G)$ gleich der topologischen Euler Zahl

$$\chi(Y) := \sum_i (-1)^i \dim H_i(Y, \mathbb{Z}) \ .$$

Dies wurde zur "physicist's Euler number conjecture".

Zusammenhang

Lemma (Hirzebruch, Höfer, 1990)

Für $M = \mathbb{C}^n$ und $G \leq \mathrm{U}(\mathbb{C}^n)$ endlich erhält man

$$\begin{aligned} e(\mathbb{C}^n, G) &= |\{\text{Konjugationsklassen von } G\}| \\ &= |\{\text{irreduzible Darstellungen von } G\}| \ . \end{aligned}$$

Zusammenhang

Lemma (Hirzebruch, Höfer, 1990)

Für $M = \mathbb{C}^n$ und $G \leq \mathrm{U}(\mathbb{C}^n)$ endlich erhält man

$$\begin{aligned} e(\mathbb{C}^n, G) &= |\{\text{Konjugationsklassen von } G\}| \\ &= |\{\text{irreduzible Darstellungen von } G\}| \ . \end{aligned}$$

In Dimension 2:

Für $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ endlich haben wir

$$\{\text{irreduzible Darstellungen von } G\} \xleftrightarrow{\sim} \text{Basis von } H_*(Y, \mathbb{Z}) \ .$$

Zusammenhang

Lemma (Hirzebruch, Höfer, 1990)

Für $M = \mathbb{C}^n$ und $G \leq \mathrm{U}(\mathbb{C}^n)$ endlich erhält man

$$\begin{aligned} e(\mathbb{C}^n, G) &= |\{\text{Konjugationsklassen von } G\}| \\ &= |\{\text{irreduzible Darstellungen von } G\}| \ . \end{aligned}$$

In Dimension 2:

Für $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ endlich haben wir

$$\{\text{irreduzible Darstellungen von } G\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \text{Basis von } H_*(Y, \mathbb{Z}) \ .$$

Die "ungerade" Homologie ist trivial, also ist tatsächlich

$$e(\mathbb{C}^2, G) = \sum_i (-1)^i \dim H_i(Y, \mathbb{Z}) = \chi(Y) \ .$$

Zusammenhang

Vermutung (Reid, 1992)

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich. Angenommen die Varietät $\mathbb{C}^n/G$ hat eine crepante Auflösung $Y \to \mathbb{C}^n/G$.

Zusammenhang

Vermutung (Reid, 1992)

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich. Angenommen die Varietät $\mathbb{C}^n/G$ hat eine crepante Auflösung $Y \to \mathbb{C}^n/G$.
Dann hat $H^*(Y, \mathbb{Q})$ eine Basis, die eins-zu-eins zu den Konjugationsklassen von G korrespondiert.

Grundprinzip

Klassisch

Physik

Höhere Dimensionen

Dimension 3

Satz (Ito, Reid, 1996)

Die Vermutung stimmt in Dimension 3.

Das Alter von Matrizen

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich und $g \in G$ mit Ordnung r.

Das Alter von Matrizen

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich und $g \in G$ mit Ordnung r. Fixiere eine primitive r-te Einheitswurzel $\zeta_r \in \mathbb{C}^\times$.

Das Alter von Matrizen

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich und $g \in G$ mit Ordnung r. Fixiere eine primitive r-te Einheitswurzel $\zeta_r \in \mathbb{C}^\times$. In einer Eigenbasis hat g dann die Form

$$g = \mathrm{diag}(\zeta_r^{a_1}, \ldots, \zeta_r^{a_n})$$

mit $0 \leq a_i < r$.

Das Alter von Matrizen

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich und $g \in G$ mit Ordnung r. Fixiere eine primitive r-te Einheitswurzel $\zeta_r \in \mathbb{C}^\times$. In einer Eigenbasis hat g dann die Form

$$g = \mathrm{diag}(\zeta_r^{a_1}, \ldots, \zeta_r^{a_n})$$

mit $0 \leq a_i < r$. Wegen $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ gilt $\prod_i \zeta_r^{a_i} = 1$, also $\sum_i a_i \equiv 0 \mod r$.

Das Alter von Matrizen

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich und $g \in G$ mit Ordnung r. Fixiere eine primitive r-te Einheitswurzel $\zeta_r \in \mathbb{C}^\times$. In einer Eigenbasis hat g dann die Form

$$g = \mathrm{diag}(\zeta_r^{a_1}, \ldots, \zeta_r^{a_n})$$

mit $0 \leq a_i < r$. Wegen $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ gilt $\prod_i \zeta_r^{a_i} = 1$, also $\sum_i a_i \equiv 0 \mod r$.

Definition

In dieser Situation ist

$$\operatorname{age} g := \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} a_i \in \{0, \ldots, n-1\}$$

das Alter von g.
Elemente mit Alter 1 heißen junior.

Juniors

Satz (Ito, Reid, 1996)

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich und $Y \to \mathbb{C}^n/G$ ein minimales Modell.

Juniors

Satz (Ito, Reid, 1996)

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich und $Y \to \mathbb{C}^n/G$ ein minimales Modell. Dann gibt es eine Eins-zu-eins-Korrespondenz zwischen den Konjugationsklassen von Juniorelementen von G und den exzeptionellen Divisoren von Y.

Juniors

Satz (Ito, Reid, 1996)

Sei $G \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ endlich und $Y \to \mathbb{C}^n/G$ ein minimales Modell. Dann gibt es eine Eins-zu-eins-Korrespondenz zwischen den Konjugationsklassen von Juniorelementen von G und den exzeptionellen Divisoren von Y.

Korollar

Es gibt eine Bijektion

$$\{\text{Konjugationsklassen von Juniorelementen von } G\}$$

$$\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$$

$$\text{Basis von } H^2(Y, \mathbb{Q}) \; .$$

Dimension 3

Mit etwas Magie (Poincaré-Dualität) folgt dann

Satz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ endlich und $Y \to \mathbb{C}^3/G$ eine crepante Auflösung. Dann gibt es Bijektionen

$$\{\text{Konjugationsklassen von Elementen mit Alter } i \text{ von } G\}$$

$$\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$$

$$\text{Basis von } H^{2i}(Y, \mathbb{Q})$$

für $i = 0, 1, 2$.

Dimension 3

Mit etwas Magie (Poincaré-Dualität) folgt dann

Satz

Sei $G \leq \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ endlich und $Y \to \mathbb{C}^3/G$ eine crepante Auflösung. Dann gibt es Bijektionen

$$\{\text{Konjugationsklassen von Elementen mit Alter } i \text{ von } G\}$$

$$\overset{\sim}{\longleftrightarrow}$$

$$\text{Basis von } H^{2i}(Y, \mathbb{Q})$$

für $i = 0, 1, 2$.

Da es keine ungerade Kohomologie gibt, beweist das die McKay-Vermutung in Dimension 3.