Quotientenvarietäten

Der Gute, der Kategorielle, der Geometrische

Johannes Schmitt
TU Kaiserslautern
8. September 2020

Algebraische Gruppen

Definition

Eine lineare algebraische Gruppe über einem Körper k ist eine affine Varietät G mit:

Algebraische Gruppen

Definition

Eine lineare algebraische Gruppe über einem Körper k ist eine affine Varietät G mit:

- die Menge der Punkte von G ist mit einer Gruppenstruktur ausgestattet,

Algebraische Gruppen

Definition

Eine lineare algebraische Gruppe über einem Körper k ist eine affine Varietät G mit:

- die Menge der Punkte von G ist mit einer Gruppenstruktur ausgestattet,
- Gruppenoperation

  $$\mu : G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$$

  und Invertieren

  $$i : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

  sind Morphismen von Varietäten.

Beispiele

$\mathbf{G}_a$

Die additive Gruppe $(k, +)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_a$:

Beispiele

$\mathbf{G}_a$

Die additive Gruppe $(k, +)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_a$:

Identifiziere k mit $\mathbb{A}^1_k$.

Addition, Invertieren gegeben durch Polynome.

Beispiele

$\mathbf{G}_a$

Die additive Gruppe $(k, +)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_a$:

Identifiziere k mit $\mathbb{A}^1_k$.

Addition, Invertieren gegeben durch Polynome.

Beispiele

$\mathbf{G}_a$

Die additive Gruppe $(k, +)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_a$:

Identifiziere k mit $\mathbb{A}^1_k$.

Addition, Invertieren gegeben durch Polynome.

Koordinatenring:

$$k[\mathbf{G}_a] = k[x].$$

Beispiele

$\mathbf{G}_m$

Die Einheitengruppe $(k^\times, \cdot)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_m$:

Beispiele

$\mathbf{G}_m$

Die Einheitengruppe $(k^\times, \cdot)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_m$:

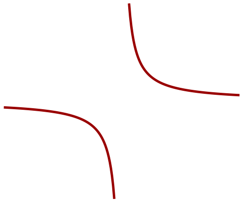
Identifiziere $k^\times$ mit $V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ via
$\lambda \mapsto (\lambda, \lambda^{-1})$.
(Multiplikation, Invertieren komponentenweise).

Beispiele

$\mathbf{G}_m$

Die Einheitengruppe $(k^\times, \cdot)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_m$:

Identifiziere $k^\times$ mit $V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ via $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda^{-1})$.
(Multiplikation, Invertieren komponentenweise).

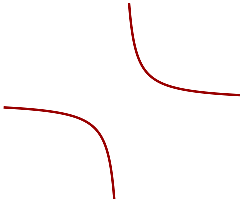


Beispiele

$\mathbf{G}_m$

Die Einheitengruppe $(k^\times, \cdot)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_m$:

Identifiziere $k^\times$ mit $V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ via $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda^{-1})$.
(Multiplikation, Invertieren komponentenweise).
Koordinatenring:



$$k[\mathbf{G}_m] = k[x,y]/\langle xy-1\rangle \cong k[T, T^{-1}].$$

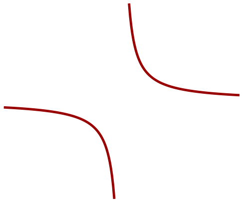
Beispiele

$\mathbf{G}_m$

Die Einheitengruppe $(k^\times, \cdot)$ eines Körpers k ist eine algebraische Gruppe $\mathbf{G}_m$:

Identifiziere $k^\times$ mit $V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ via $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda^{-1})$.
(Multiplikation, Invertieren komponentenweise).
Koordinatenring:

$$k[\mathbf{G}_m] = k[x,y]/\langle xy-1\rangle \cong k[T, T^{-1}].$$



Allgemeiner: $(k^\times)^n$ ist eine algebraische Gruppe mit Koordinatenring $k[T_1, \ldots, T_n, T_1^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]$.

Beispiele

$\mathrm{GL}_n(k)$

Identifiziere $\mathrm{GL}_n(k)$ via $A \mapsto \big(A, (\det A)^{-1}\big)$ mit

$$\big\{(A, y) \in k^{n\times n} \times k \;\big|\; \det(A)y = 1\big\}.$$

Beispiele

$\mathrm{GL}_n(k)$

Identifiziere $\mathrm{GL}_n(k)$ via $A \mapsto \big(A, (\det A)^{-1}\big)$ mit

$$\Big\{(A, y) \in k^{n\times n} \times k \;\Big|\; \underbrace{\det(A)y = 1}_{\text{Polynom!}}\Big\}.$$

Beispiele

$\mathrm{GL}_n(k)$

Identifiziere $\mathrm{GL}_n(k)$ via $A \mapsto \big(A, (\det A)^{-1}\big)$ mit

$$\left\{ (A, y) \in k^{n\times n} \times k \;\middle|\; \det(A)y = 1 \right\}.$$

Koordinatenring:

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[\,T_{ij} \mid 1 \le i,j \le n]_{\det T_{ij}}.$$

Beispiele

$\mathrm{GL}_n(k)$

Identifiziere $\mathrm{GL}_n(k)$ via $A \mapsto \big(A, (\det A)^{-1}\big)$ mit

$$\big\{(A, y) \in k^{n\times n} \times k \;\big|\; \det(A)y = 1\big\}.$$

Koordinatenring:

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[T_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]_{\det T_{ij}}.$$

Man kann zeigen: Jede lineare algebraische Gruppe lässt sich in GL_n als abgeschlossene Untergruppe einbetten.

A. Borel, "Linear Algebraic Groups", Proposition 1.10.

Beispiele

$\mathrm{GL}_n(k)$

Identifiziere $\mathrm{GL}_n(k)$ via $A \mapsto \big(A, (\det A)^{-1}\big)$ mit

$$\big\{(A, y) \in k^{n \times n} \times k \;\big|\; \det(A) y = 1\,\big\}.$$

Koordinatenring:

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[\,T_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]_{\det T_{ij}}.$$

Man kann zeigen: Jede lineare algebraische Gruppe lässt sich in GL_n als abgeschlossene Untergruppe einbetten.

A. Borel, “Linear Algebraic Groups”, Proposition 1.10.

Morphismen

Definition

Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ von linearen algebraischen Gruppen ist ein Morphismus algebraischer Gruppen, wenn φ ein Gruppenhomomorphismus und ein Morphismus von Varietäten ist.

Morphismen

Definition

Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ von linearen algebraischen Gruppen ist ein Morphismus algebraischer Gruppen, wenn φ ein Gruppenhomomorphismus und ein Morphismus von Varietäten ist.

Beispiel

Die Determinantenabbildung $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathbf{G}_m$ ist ein Morphismus algebraischer Gruppen.

Morphismen

Definition

Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ von linearen algebraischen Gruppen ist ein Morphismus algebraischer Gruppen, wenn φ ein Gruppenhomomorphismus und ein Morphismus von Varietäten ist.

Beispiel

Die Determinantenabbildung $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathbf{G}_m$ ist ein Morphismus algebraischer Gruppen.

- Gruppenhomomorphismus: $\det(AB) = \det A \det B$

Morphismen

Definition

Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ von linearen algebraischen Gruppen ist ein Morphismus algebraischer Gruppen, wenn φ ein Gruppenhomomorphismus und ein Morphismus von Varietäten ist.

Beispiel

Die Determinantenabbildung $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathbf{G}_m$ ist ein Morphismus algebraischer Gruppen.

- Gruppenhomomorphismus: $\det(AB) = \det A \det B$
- Morphismus von Varietäten: det ist polynomiell.

Gruppenoperationen

Definition

Eine (reguläre/rationale) Operation einer algebraischen Gruppe G auf einer affinen Varietät X ist eine (Gruppen-)Operation von G auf den Punkten von X gegeben durch einen Morphismus von Varietäten $G \times X \to X$.

Gruppenoperationen

Definition

Eine (reguläre/rationale) Operation einer algebraischen Gruppe G auf einer affinen Varietät X ist eine (Gruppen-)Operation von G auf den Punkten von X gegeben durch einen Morphismus von Varietäten $G \times X \to X$. Man nennt X eine G-Varietät.

Gruppenoperationen

Definition

Eine (reguläre/rationale) Operation einer algebraischen Gruppe G auf einer affinen Varietät X ist eine (Gruppen-)Operation von G auf den Punkten von X gegeben durch einen Morphismus von Varietäten $G \times X \to X$. Man nennt X eine G-Varietät.

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $\mathbb{A}^2_k$ via

$$(\lambda, (v, w)) \mapsto (v, w + \lambda v).$$

Gruppenoperationen

Definition

Eine (reguläre/rationale) Operation einer algebraischen Gruppe G auf einer affinen Varietät X ist eine (Gruppen-)Operation von G auf den Punkten von X gegeben durch einen Morphismus von Varietäten $G \times X \to X$. Man nennt X eine G-Varietät.

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $\mathbb{A}_k^2$ via

$$(\lambda, (v, w)) \mapsto (v, w + \lambda v).$$

Standardbeispiel m

Die Gruppe $\mathbf{G}_m$ operiert für jedes Tupel $a, b \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{A}_k^2$ via

$$(\lambda, (v, w)) \mapsto (\lambda^a v, \lambda^b w).$$

Algebraische Gruppen

Gruppenoperationen

Quotienten

Quotienten

Sei G eine algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Quotienten

Sei G eine algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Wunsch

Konstruiere eine Varietät Y, deren Punkte zu Bahnen der Gruppenoperation korrespondieren sowie eine surjektive Abbildung $\rho : X \to Y$.

Quotienten

Sei G eine algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Wunsch

Konstruiere eine Varietät Y, deren Punkte zu Bahnen der Gruppenoperation korrespondieren sowie eine surjektive Abbildung $\rho : X \to Y$.

Problem

Die Projektion ρ sollte ein Morphismus von Varietäten sein.

Quotienten

Sei G eine algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Wunsch

Konstruiere eine Varietät Y, deren Punkte zu Bahnen der Gruppenoperation korrespondieren sowie eine surjektive Abbildung $\rho : X \to Y$.

Problem

Die Projektion ρ sollte ein Morphismus von Varietäten sein. Im Allgemeinen sind die Bahnen aber nicht abgeschlossen.

Quotienten

Sei G eine algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Wunsch

Konstruiere eine Varietät Y, deren Punkte zu Bahnen der Gruppenoperation korrespondieren sowie eine surjektive Abbildung $\rho : X \to Y$.

Problem

Die Projektion ρ sollte ein Morphismus von Varietäten sein. Im Allgemeinen sind die Bahnen aber nicht abgeschlossen.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$.

Quotienten

Sei G eine algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X operiert.

Wunsch

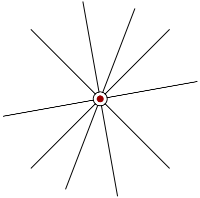
Konstruiere eine Varietät Y, deren Punkte zu Bahnen der Gruppenoperation korrespondieren sowie eine surjektive Abbildung $\rho : X \to Y$.

Problem

Die Projektion ρ sollte ein Morphismus von Varietäten sein. Im Allgemeinen sind die Bahnen aber nicht abgeschlossen.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$. Die Bahnen von $\mathbf{G}_m$ auf $\mathbb{A}^2_k$ sind der Ursprung und punktierte Geraden durch den Ursprung.



Quotienten

Minimalanforderungen

Quotienten

Minimalanforderungen

- Die “Projektion” ρ soll G-invariant sein, also $\rho(gx) = \rho(x)$ für alle $x \in X, g \in G$.

Quotienten

Minimalanforderungen

- Die "Projektion" ρ soll G-invariant sein, also $\rho(gx) = \rho(x)$ für alle $x \in X, g \in G$.
- Der Quotient soll "minimal" sein.

Quotienten

Minimalanforderungen

- Die "Projektion" ρ soll G-invariant sein, also $\rho(gx) = \rho(x)$ für alle $x \in X, g \in G$.
- Der Quotient soll "minimal" sein.

Definition

Ein kategorieller Quotient einer G-Varietät X ist ein G-invarianter Morphismus $\rho : X \to Y$, sodass für jeden G-invarianten Morphismus $\sigma : X \to Z$ ein eindeutiger Morphismus $\overline{\sigma} : Y \to Z$ mit $\overline{\sigma} \circ \rho = \sigma$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\sigma"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists!\overline{\sigma}"] \\
Z &
\end{tikzcd}$$

Quotienten

Minimalanforderungen

- Die "Projektion" ρ soll G-invariant sein, also $\rho(gx) = \rho(x)$ für alle $x \in X, g \in G$.
- Der Quotient soll "minimal" sein.

Definition

Ein kategorieller Quotient einer G-Varietät X ist ein G-invarianter Morphismus $\rho : X \to Y$, sodass für jeden G-invarianten Morphismus $\sigma : X \to Z$ ein eindeutiger Morphismus $\overline{\sigma} : Y \to Z$ mit $\overline{\sigma} \circ \rho = \sigma$ existiert.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\sigma"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists!\overline{\sigma}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Kategorielle Quotienten sind eindeutig bis auf Isomorphie (üblicher Beweis über universelle Eigenschaft).

Quotienten

Notation

Ist X eine G-Varietät, so operiert G auf $\mathcal{O}_X(X)$ via

$$g.f(x) = f(g^{-1}.x)$$

für $g \in G$, $f \in \mathcal{O}_X(X)$ und $x \in X$.

Quotienten

Notation

Ist X eine G-Varietät, so operiert G auf $\mathcal{O}_X(X)$ via

$$g.f(x) = f(g^{-1}.x)$$

für $g \in G$, $f \in \mathcal{O}_X(X)$ und $x \in X$. Schreibe $\mathcal{O}_X(X)^G$ für den Ring der invarianten Funktionen.

Quotienten

Notation

Ist X eine G-Varietät, so operiert G auf $\mathcal{O}_X(X)$ via

$$g.f(x) = f(g^{-1}.x)$$

für $g \in G$, $f \in \mathcal{O}_X(X)$ und $x \in X$. Schreibe $\mathcal{O}_X(X)^G$ für den Ring der invarianten Funktionen.

Lemma

Ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, so ist die durch $\mathcal{O}_X(X)^G \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induzierte Abbildung $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ ein kategorieller Quotient für die G-Operation.

Quotienten

Lemma

Ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, so ist die durch $\mathcal{O}_X(X)^G \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induzierte Abbildung $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ ein kategorieller Quotient für die G-Operation.

Quotienten

Lemma

Ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, so ist die durch $\mathcal{O}_X(X)^G \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induzierte Abbildung $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ ein kategorieller Quotient für die G-Operation.

Beweis.

Sei $Y := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ und $\varphi : X \to Y$
die kanonische Abbildung.

Quotienten

Lemma

Ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, so ist die durch $\mathcal{O}_X(X)^G \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induzierte Abbildung $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ ein kategorieller Quotient für die G-Operation.

Beweis.

Sei $Y := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ und $\varphi : X \to Y$
die kanonische Abbildung. Offenbar ist
φ dann G-invariant.

Quotienten

Lemma

Ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, so ist die durch $\mathcal{O}_X(X)^G \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induzierte Abbildung $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ ein kategorieller Quotient für die G-Operation.

Beweis.

Sei $Y := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ und $\varphi : X \to Y$ die kanonische Abbildung. Offenbar ist φ dann G-invariant.

Sei $\sigma : X \to Z$ eine G-invariante Abbildung mit induzierter Abbildung

$$\sigma^* : \mathcal{O}_Z(Z) \to \mathcal{O}_X(X), \ f \mapsto f \circ \sigma.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \xleftarrow{\supseteq} & \mathcal{O}_X(X)^G \\ {\scriptstyle\sigma^*}\uparrow & & \\ \mathcal{O}_Z(Z) & & \end{array}$$

Quotienten

Lemma

Ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, so ist die durch $\mathcal{O}_X(X)^G \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induzierte Abbildung $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ ein kategorieller Quotient für die G-Operation.

Beweis.

Sei $\sigma : X \to Z$ eine G-invariante Abbildung mit induzierter Abbildung

$$\sigma^* : \mathcal{O}_Z(Z) \to \mathcal{O}_X(X),\ f \mapsto f \circ \sigma.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"'] & Y \\ Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(X) & \mathcal{O}_X(X)^G \arrow[l, "\supseteq"'] \\ \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[u, "\sigma^*"] \end{tikzcd}$$

Quotienten

Lemma

Ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, so ist die durch $\mathcal{O}_X(X)^G \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induzierte Abbildung $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ ein kategorieller Quotient für die G-Operation.

Beweis.

Sei $\sigma : X \to Z$ eine G-invariante Abbildung mit induzierter Abbildung

$$\sigma^* : \mathcal{O}_Z(Z) \to \mathcal{O}_X(X),\ f \mapsto f \circ \sigma.$$

Dann ist

$$\sigma^*(\mathcal{O}_Z(Z)) \subseteq \mathcal{O}_X(X)^G = \mathcal{O}_Y(Y)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\sigma"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(X) & \mathcal{O}_X(X)^G \arrow[l, "\supseteq"'] \\ \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[ur, "\sigma^*"'] & \end{tikzcd}$$

Quotienten

Lemma

Ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, so ist die durch $\mathcal{O}_X(X)^G \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induzierte Abbildung $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)^G$ ein kategorieller Quotient für die G-Operation.

Beweis.

Sei $\sigma : X \to Z$ eine G-invariante Abbildung mit induzierter Abbildung

$$\sigma^* : \mathcal{O}_Z(Z) \to \mathcal{O}_X(X),\ f \mapsto f \circ \sigma.$$

Dann ist

$$\sigma^*(\mathcal{O}_Z(Z)) \subseteq \mathcal{O}_X(X)^G = \mathcal{O}_Y(Y)$$

und man erhält die gewünschte Abbildung $\overline{\sigma} : Y \to Z$. □

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\sigma"'] & Y \arrow[dl, "\overline{\sigma}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(X) & \mathcal{O}_X(X)^G \arrow[l, hook', "\supseteq"'] \\ \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[ur, "\sigma^*"'] & \end{tikzcd}$$

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$.
Es gilt also $k[x, y]^{\mathbf{G}_a} = k[x]$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$. Es gilt also $k[x, y]^{\mathbf{G}_a} = k[x]$. Die Projektion

$$\rho : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^1,\ (v, w) \mapsto v$$

ist daher ein kategorieller Quotient für die Operation von $\mathbf{G}_a$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x,y]$ via $\lambda.f(x,y) = f(x, y - \lambda x)$. Es gilt also $k[x,y]^{\mathbf{G}_a} = k[x]$. Die Projektion

$$\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k,\ (v,w) \mapsto v$$

ist daher ein kategorieller Quotient für die Operation von $\mathbf{G}_a$.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$, damit operiert $\mathbf{G}_m$ auf $k[x,y]$ via $\lambda.f(x,y) = f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$. Es gilt also $k[x, y]^{\mathbf{G}_a} = k[x]$. Die Projektion

$$\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k,\ (v, w) \mapsto v$$

ist daher ein kategorieller Quotient für die Operation von $\mathbf{G}_a$.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$, damit operiert $\mathbf{G}_m$ auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$. Dann ist $k[x, y]^{\mathbf{G}_m} = k$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$. Es gilt also $k[x, y]^{\mathbf{G}_a} = k[x]$. Die Projektion

$$\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k,\ (v, w) \mapsto v$$

ist daher ein kategorieller Quotient für die Operation von $\mathbf{G}_a$.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$, damit operiert $\mathbf{G}_m$ auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$. Dann ist $k[x, y]^{\mathbf{G}_m} = k$. Der kategorielle Quotient ist demnach $\mathbb{A}^2_k \to \operatorname{Spec} k = \{\mathrm{pt}\}$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x,y]$ via $\lambda.f(x,y) = f(x, y - \lambda x)$. Es gilt also $k[x,y]^{\mathbf{G}_a} = k[x]$. Die Projektion

$$\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k,\ (v,w) \mapsto v$$

ist daher ein kategorieller Quotient für die Operation von $\mathbf{G}_a$.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$, damit operiert $\mathbf{G}_m$ auf $k[x,y]$ via $\lambda.f(x,y) = f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$. Dann ist $k[x,y]^{\mathbf{G}_m} = k$. Der kategorielle Quotient ist demnach $\mathbb{A}^2_k \to \operatorname{Spec} k = \{\mathrm{pt}\}$.

Standardbeispiel m

Seien $a = 1$ und $b = -1$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$. Es gilt also $k[x, y]^{\mathbf{G}_a} = k[x]$. Die Projektion

$$\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k,\ (v, w) \mapsto v$$

ist daher ein kategorieller Quotient für die Operation von $\mathbf{G}_a$.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$, damit operiert $\mathbf{G}_m$ auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$. Dann ist $k[x, y]^{\mathbf{G}_m} = k$. Der kategorielle Quotient ist demnach $\mathbb{A}^2_k \to \operatorname{Spec} k = \{\mathrm{pt}\}$.

Standardbeispiel m

Seien $a = 1$ und $b = -1$. Dann ist $k[x, y]^{\mathbf{G}_m} = k[xy]$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Die Gruppe $\mathbf{G}_a$ operiert auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(x, y - \lambda x)$. Es gilt also $k[x, y]^{\mathbf{G}_a} = k[x]$. Die Projektion

$$\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k,\ (v, w) \mapsto v$$

ist daher ein kategorieller Quotient für die Operation von $\mathbf{G}_a$.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$, damit operiert $\mathbf{G}_m$ auf $k[x, y]$ via $\lambda.f(x, y) = f(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y)$. Dann ist $k[x, y]^{\mathbf{G}_m} = k$. Der kategorielle Quotient ist demnach $\mathbb{A}^2_k \to \operatorname{Spec} k = \{\mathrm{pt}\}$.

Standardbeispiel m

Seien $a = 1$ und $b = -1$. Dann ist $k[x, y]^{\mathbf{G}_m} = k[xy]$. Der kategorielle Quotient ist also $\mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k,\ (v, w) \mapsto vw$.

Quotienten

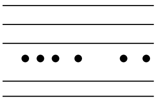
Problem

Kategorielle Quotienten trennen keine Bahnen: Im Standardbeispiel a sind Punkte $(0, w) \in \mathbb{A}_k^2$ stabil, es gilt aber $\rho((0, w)) = 0$.

Quotienten

Problem

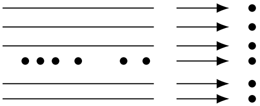
Kategorielle Quotienten trennen keine Bahnen: Im Standardbeispiel a sind Punkte $(0, w) \in \mathbb{A}_k^2$ stabil, es gilt aber $\rho((0, w)) = 0$.



Quotienten

Problem

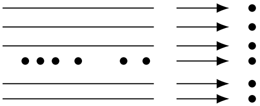
Kategorielle Quotienten trennen keine Bahnen: Im Standardbeispiel a sind Punkte $(0, w) \in \mathbb{A}_k^2$ stabil, es gilt aber $\rho((0, w)) = 0$.



Quotienten

Problem

Kategorielle Quotienten trennen keine Bahnen: Im Standardbeispiel a sind Punkte $(0, w) \in \mathbb{A}_k^2$ stabil, es gilt aber $\rho((0, w)) = 0$.

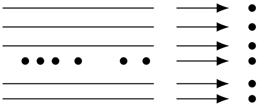


Im Standardbeispiel m mit $a = b = 1$ gehen sogar alle Bahnen auf den gleichen Punkt.

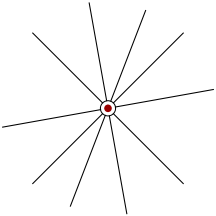
Quotienten

Problem

Kategorielle Quotienten trennen keine Bahnen: Im Standardbeispiel a sind Punkte $(0, w) \in \mathbb{A}_k^2$ stabil, es gilt aber $\rho((0, w)) = 0$.



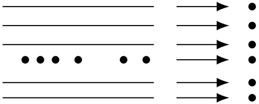
Im Standardbeispiel m mit $a = b = 1$ gehen sogar alle Bahnen auf den gleichen Punkt.



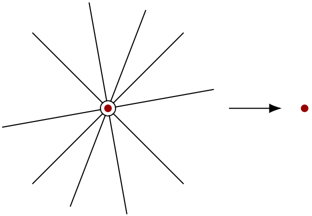
Quotienten

Problem

Kategorielle Quotienten trennen keine Bahnen: Im Standardbeispiel a sind Punkte $(0, w) \in \mathbb{A}_k^2$ stabil, es gilt aber $\rho((0, w)) = 0$.



Im Standardbeispiel m mit $a = b = 1$ gehen sogar alle Bahnen auf den gleichen Punkt.



Quotienten

Definition

Ein Morphismus $\rho : X \to Y$ ist ein guter Quotient für die Operation von G auf X, wenn

- ρ surjektiv, G-invariant und affin ist,
- der Pullback $\rho^* : \mathcal{O}_Y \to (\rho_* \mathcal{O}_X)^G$ ein Isomorphismus ist,
- für jede G-invariante, abgeschlossene Menge $V \subseteq X$ das Bild $\rho(V)$ abgeschlossen in Y ist,
- für zwei disjunkte, G-invariante, abgeschlossene Mengen $V_1, V_2 \subseteq X$ die Bilder $\rho(V_1)$ und $\rho(V_2)$ disjunkt sind.

Quotienten

Definition

Ein Morphismus $\rho : X \to Y$ ist ein guter Quotient für die Operation von G auf X, wenn

- ρ surjektiv, G-invariant und affin ist,
- der Pullback $\rho^* : \mathcal{O}_Y \to (\rho_* \mathcal{O}_X)^G$ ein Isomorphismus ist,
- für jede G-invariante, abgeschlossene Menge $V \subseteq X$ das Bild $\rho(V)$ abgeschlossen in Y ist,
- für zwei disjunkte, G-invariante, abgeschlossene Mengen $V_1, V_2 \subseteq X$ die Bilder $\rho(V_1)$ und $\rho(V_2)$ disjunkt sind.

Punkt 2 in anderen Worten:

- Für jede offene Menge $U \subseteq Y$ soll die induzierte Abbildung

$$\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\rho^{-1}(U)),\ f \mapsto f \circ \rho$$

ein injektiver Morphismus mit Bild $\mathcal{O}_X(\rho^{-1}(U))^G$ sein.

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ ist kein guter Quotient:

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^1$ ist kein guter Quotient: Die abgeschlossenen, disjunkten, $\mathbf{G}_a$-invarianten Mengen $(0,0)$ und $(0,1)$ werden durch ρ nicht getrennt.

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ ist kein guter Quotient: Die abgeschlossenen, disjunkten, $\mathbf{G}_a$-invarianten Mengen $(0,0)$ und $(0,1)$ werden durch ρ nicht getrennt.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$.

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ ist kein guter Quotient: Die abgeschlossenen, disjunkten, $\mathbf{G}_a$-invarianten Mengen $(0,0)$ und $(0,1)$ werden durch ρ nicht getrennt.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$. Dann ist der Quotient $\rho : \mathbb{A}^2_k \to \operatorname{Spec} k$ ein guter Quotient:

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ ist kein guter Quotient: Die abgeschlossenen, disjunkten, $\mathbf{G}_a$-invarianten Mengen $(0,0)$ und $(0,1)$ werden durch ρ nicht getrennt.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$. Dann ist der Quotient $\rho : \mathbb{A}^2_k \to \operatorname{Spec} k$ ein guter Quotient:

- ρ ist surjektiv, G-invariant und affin,
- der Pullback $\rho^* : \mathcal{O}_Y \to (\rho_* \mathcal{O}_X)^G$ ist ein Isomorphismus,
- für jede G-invariante, abgeschlossene Menge $V \subseteq X$ ist das Bild $\rho(V)$ abgeschlossen in Y,
- für zwei disjunkte, G-invariante, abgeschlossene Mengen $V_1, V_2 \subseteq X$ sind die Bilder $\rho(V_1)$ und $\rho(V_2)$ disjunkt.

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ ist kein guter Quotient: Die abgeschlossenen, disjunkten, $\mathbf{G}_a$-invarianten Mengen $(0,0)$ und $(0,1)$ werden durch ρ nicht getrennt.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$. Dann ist der Quotient $\rho : \mathbb{A}^2_k \to \operatorname{Spec} k$ ein guter Quotient:

- ρ ist surjektiv, G-invariant und affin,
- der Pullback $\rho^* : \mathcal{O}_Y \to (\rho_* \mathcal{O}_X)^G$ ist ein Isomorphismus,
- für jede G-invariante, abgeschlossene Menge $V \subseteq X$ ist das Bild $\rho(V)$ abgeschlossen in Y,
- für zwei disjunkte, G-invariante, abgeschlossene Mengen $V_1, V_2 \subseteq X$ sind die Bilder $\rho(V_1)$ und $\rho(V_2)$ disjunkt.

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^1$ ist kein guter Quotient: Die abgeschlossenen, disjunkten, $\mathbf{G}_a$-invarianten Mengen $(0,0)$ und $(0,1)$ werden durch ρ nicht getrennt.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$. Dann ist der Quotient $\rho : \mathbb{A}_k^2 \to \operatorname{Spec} k$ ein guter Quotient:

- ρ ist surjektiv, G-invariant und affin,
- der Pullback $\rho^* : \mathcal{O}_Y \to (\rho_* \mathcal{O}_X)^G$ ist ein Isomorphismus,
- für jede G-invariante, abgeschlossene Menge $V \subseteq X$ ist das Bild $\rho(V)$ abgeschlossen in Y,
- für zwei disjunkte, G-invariante, abgeschlossene Mengen $V_1, V_2 \subseteq X$ sind die Bilder $\rho(V_1)$ und $\rho(V_2)$ disjunkt.

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^1$ ist kein guter Quotient: Die abgeschlossenen, disjunkten, $\mathbf{G}_a$-invarianten Mengen $(0,0)$ und $(0,1)$ werden durch ρ nicht getrennt.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$. Dann ist der Quotient $\rho : \mathbb{A}_k^2 \to \operatorname{Spec} k$ ein guter Quotient:

- ρ ist surjektiv, G-invariant und affin,
- der Pullback $\rho^* : \mathcal{O}_Y \to (\rho_* \mathcal{O}_X)^G$ ist ein Isomorphismus,
- für jede G-invariante, abgeschlossene Menge $V \subseteq X$ ist das Bild $\rho(V)$ abgeschlossen in Y,
- für zwei disjunkte, G-invariante, abgeschlossene Mengen $V_1, V_2 \subseteq X$ sind die Bilder $\rho(V_1)$ und $\rho(V_2)$ disjunkt.

Beispiele

Standardbeispiel a

Der kategorielle Quotient $\rho : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^1$ ist kein guter Quotient: Die abgeschlossenen, disjunkten, $\mathbf{G}_a$-invarianten Mengen $(0, 0)$ und $(0, 1)$ werden durch ρ nicht getrennt.

Standardbeispiel m

Seien $a = b = 1$. Dann ist der Quotient $\rho : \mathbb{A}_k^2 \to \operatorname{Spec} k$ ein guter Quotient:

- ρ ist surjektiv, G-invariant und affin,
- der Pullback $\rho^* : \mathcal{O}_Y \to (\rho_* \mathcal{O}_X)^G$ ist ein Isomorphismus,
- für jede G-invariante, abgeschlossene Menge $V \subseteq X$ ist das Bild $\rho(V)$ abgeschlossen in Y,
- für zwei disjunkte, G-invariante, abgeschlossene Mengen $V_1, V_2 \subseteq X$ sind die Bilder $\rho(V_1)$ und $\rho(V_2)$ disjunkt.

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.
Insbesondere sind gute Quotienten eindeutig bis auf Isomorphie.

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.

Beweiskizze.

ρ ist bereits G-invariant, zu zeigen ist also nur die Universalität.

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.

Beweisskizze.

Sei $\sigma : X \to Z$ ein G-invarianter Morphismus.

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.

Beweiskizze.

Sei $\sigma : X \to Z$ ein G-invarianter Morphismus. Für eine affine, offene Teilmenge $U \subseteq Z$ erhalten wir eine Abbildung

$$\mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_X(\sigma^{-1}(U))^G.$$

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.

Beweisskizze.

Sei $\sigma : X \to Z$ ein G-invarianter Morphismus. Für eine affine, offene Teilmenge $U \subseteq Z$ erhalten wir eine Abbildung

$$\mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_X(\sigma^{-1}(U))^G.$$

Die Menge $X \setminus \sigma^{-1}(U)$ ist abgeschlossen und G-invariant.

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.

Beweiskizze.

Sei $\sigma : X \to Z$ ein G-invarianter Morphismus. Für eine affine, offene Teilmenge $U \subseteq Z$ erhalten wir eine Abbildung

$$\mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_X(\sigma^{-1}(U))^G.$$

Die Menge $X \setminus \sigma^{-1}(U)$ ist abgeschlossen und G-invariant. Damit ist $W := \rho(X \setminus \sigma^{-1}(U))$ abgeschlossen und $V := Y \setminus W$ offen.

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.

Beweisskizze.

Sei $\sigma : X \to Z$ ein G-invarianter Morphismus. Für eine affine, offene Teilmenge $U \subseteq Z$ erhalten wir eine Abbildung

$$\mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_X(\sigma^{-1}(U))^G.$$

Die Menge $X \setminus \sigma^{-1}(U)$ ist abgeschlossen und G-invariant. Damit ist $W := \rho(X \setminus \sigma^{-1}(U))$ abgeschlossen und $V := Y \setminus W$ offen. Wegen $\rho^{-1}(V) \subseteq \sigma^{-1}(U)$ erhalten wir

$$\mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_X\left(\sigma^{-1}(U)\right)^G \to \mathcal{O}_X\left(\rho^{-1}(V)\right)^G \cong \mathcal{O}_Y(V)$$

und damit die gewünschte Abbildung $V \to U$.

Quotienten

Satz

Ein guter Quotienten $\rho : X \to Y$ ist ein kategorieller Quotient.

Beweisskizze.

Sei $\sigma : X \to Z$ ein G-invarianter Morphismus. Für eine affine, offene Teilmenge $U \subseteq Z$ erhalten wir eine Abbildung

$$\mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_X(\sigma^{-1}(U))^G.$$

Die Menge $X \setminus \sigma^{-1}(U)$ ist abgeschlossen und G-invariant. Damit ist $W := \rho(X \setminus \sigma^{-1}(U))$ abgeschlossen und $V := Y \setminus W$ offen. Wegen $\rho^{-1}(V) \subseteq \sigma^{-1}(U)$ erhalten wir

$$\mathcal{O}_Z(U) \to \mathcal{O}_X\left(\sigma^{-1}(U)\right)^G \to \mathcal{O}_X\left(\rho^{-1}(V)\right)^G \cong \mathcal{O}_Y(V)$$

und damit die gewünschte Abbildung $V \to U$. Wähle jetzt eine affine, offene Überdeckung von Z und verklebe diese Abbildungen. $\square$

Quotienten

Lemma

Sei $\rho : X \to Y$ ein guter Quotient. Es gilt:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\rho(x_1) = \rho(x_2)$.
- Für jedes $y \in Y$ enthält $\rho^{-1}(y)$ genau eine abgeschlossene Bahn.

Quotienten

Lemma

Sei $\rho : X \to Y$ ein guter Quotient. Es gilt:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\rho(x_1) = \rho(x_2)$.
- Für jedes $y \in Y$ enthält $\rho^{-1}(y)$ genau eine abgeschlossene Bahn.

Beweis.

- Seien $x_1, x_2 \in X$.

Quotienten

Lemma

Sei $\rho : X \to Y$ ein guter Quotient. Es gilt:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\rho(x_1) = \rho(x_2)$.
- Für jedes $y \in Y$ enthält $\rho^{-1}(y)$ genau eine abgeschlossene Bahn.

Beweis.

- Seien $x_1, x_2 \in X$. Gilt $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$, so folgt $\rho(x_1) = \rho(x_2)$ mit G-Invarianz.

Quotienten

Lemma

Sei $\rho : X \to Y$ ein guter Quotient. Es gilt:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\rho(x_1) = \rho(x_2)$.
- Für jedes $y \in Y$ enthält $\rho^{-1}(y)$ genau eine abgeschlossene Bahn.

Beweis.

- Seien $x_1, x_2 \in X$. Gilt $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$, so folgt $\rho(x_1) = \rho(x_2)$ mit G-Invarianz.
  Gilt $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} = \emptyset$, so sind dies disjunkte, abgeschlossene und G-invariante Mengen, die von ρ getrennt werden.

Quotienten

Lemma

Sei $\rho : X \to Y$ ein guter Quotient. Es gilt:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\rho(x_1) = \rho(x_2)$.
- Für jedes $y \in Y$ enthält $\rho^{-1}(y)$ genau eine abgeschlossene Bahn.

Beweis.

- Seien $x_1, x_2 \in X$. Gilt $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$, so folgt $\rho(x_1) = \rho(x_2)$ mit G-Invarianz.
  Gilt $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} = \emptyset$, so sind dies disjunkte, abgeschlossene und G-invariante Mengen, die von ρ getrennt werden.
- Enthält $\rho^{-1}(y)$ zwei verschiedene abgeschlossene Bahnen, so müssen diese disjunkt sein. Ein Widerspruch.

Quotienten

Lemma

Sei $\rho : X \to Y$ ein guter Quotient. Es gilt:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\rho(x_1) = \rho(x_2)$.
- Für jedes $y \in Y$ enthält $\rho^{-1}(y)$ genau eine abgeschlossene Bahn.

Beweis.

- Seien $x_1, x_2 \in X$. Gilt $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \neq \emptyset$, so folgt $\rho(x_1) = \rho(x_2)$ mit G-Invarianz.
  Gilt $\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} = \emptyset$, so sind dies disjunkte, abgeschlossene und G-invariante Mengen, die von ρ getrennt werden.
- Enthält $\rho^{-1}(y)$ zwei verschiedene abgeschlossene Bahnen, so müssen diese disjunkt sein. Ein Widerspruch.
  Für die Existenz einer abgeschlossenen Bahn siehe J. E. Humphreys, "Linear algebraic groups", Proposition II.8.3. $\square$

Quotienten

Problem

Gute Quotienten trennen zwar abgeschlossene Bahnen, aber nicht alle Bahnen.

Quotienten

Problem

Gute Quotienten trennen zwar abgeschlossene Bahnen, aber nicht alle Bahnen.

Definition

Ein guter Quotient $\rho : X \to Y$, bei dem für alle $y \in Y$ die Faser $\rho^{-1}(y)$ aus einer Bahn besteht, ist ein geometrischer Quotient.

Quotienten

Problem

Gute Quotienten trennen zwar abgeschlossene Bahnen, aber nicht alle Bahnen.

Definition

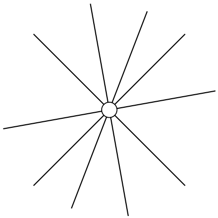
Ein guter Quotient $\rho : X \to Y$, bei dem für alle $y \in Y$ die Faser $\rho^{-1}(y)$ aus einer Bahn besteht, ist ein geometrischer Quotient.

Standardbeispiel m

Offenbar ist weder der Quotient für $a = b = 1$ noch der Quotient für $a = 1$ und $b = -1$ ein geometrischer Quotient.

Beispiel

Schränke den Quotienten aus dem Standardbeispiel m mit $a = b = 1$ ein auf $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\}$.



Beispiel

Schränke den Quotienten aus dem Standardbeispiel m mit $a = b = 1$ ein auf $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$. Dann ist die kanonische Projektion $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^1$ ein geometrischer Quotient.