Symplektische Auflösungen

Johannes Schmitt
TU Kaiserslautern
4. März 2022

Lineare Quotienten

Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$.

Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \text{ ``$=$'' Bahnenraum.}$$

Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \text{ “}{=}\text{” Bahnenraum.}$$

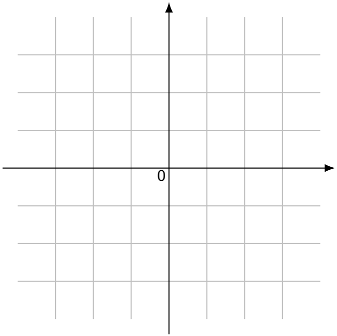
Beispiel: $G := \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

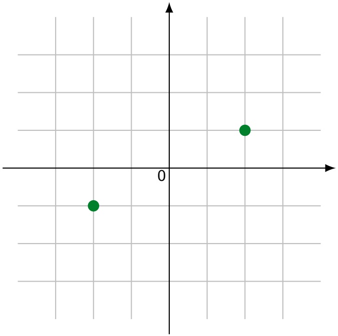


Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

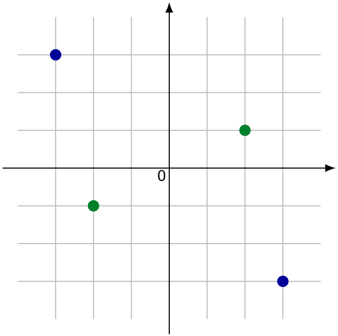


Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

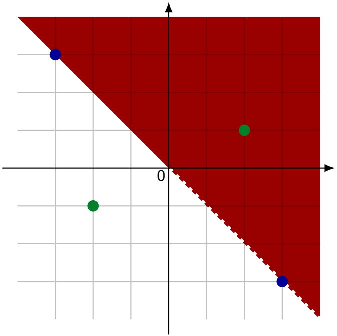


Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

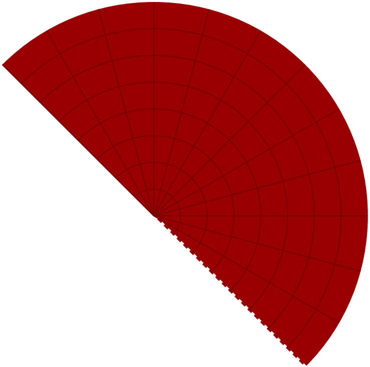


Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

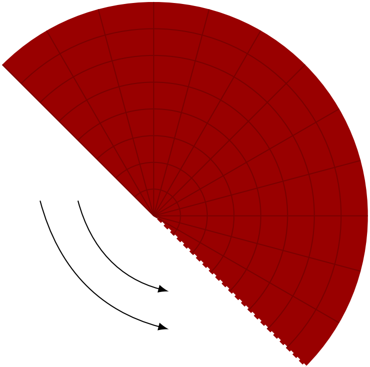


Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

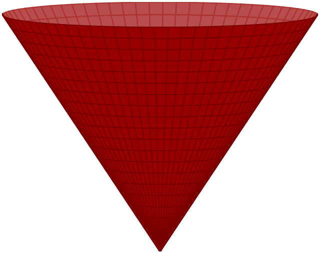


Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.



Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \text{ “}{=}\text{” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Diese Folie enthält Produktplazierungen.

Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^G \text{ ``='' Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

```
doctor@tardis:~ # julia
[...]
julia> using Oscar
[...]
julia> M = matrix(QQ, 2, 2, [ -1, 0, 0, -1 ]);
julia> G = matrix_group(M);
julia> RG = invariant_ring(G);
julia> affine_algebra(RG)[1]
Quotient of Multivariate Polynomial Ring in
y[1], y[2], y[3] over Rational Field graded by
  y[1] -> [2]
  y[2] -> [2]
  y[3] -> [2] by ideal(-y[1]*y[3] + y[2]^2)
```

Diese Folie enthält Produktplazierungen.

Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

```
doctor@tardis:~ # julia
[...]
julia> using Oscar
[...]
julia> M = matrix(QQ, 2, 2, [ -1, 0, 0, -1 ]);
julia> G = matrix_group(M);
julia> RG = invariant_ring(G);
julia> affine_algebra(RG)[1]
Quotient of Multivariate Polynomial Ring in
y[1], y[2], y[3] over Rational Field graded by
  y[1] -> [2]
  y[2] -> [2]
  y[3] -> [2] by ideal(-y[1]*y[3] + y[2]^2)
```

Also: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^G \cong \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]/\langle y_2^2 - y_1 y_3 \rangle$.

Diese Folie enthält Produktplazierungen.

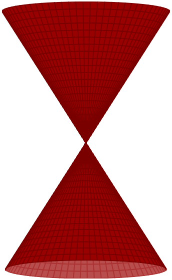
Lineare Quotienten

Sei $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $|G| < \infty$. Definiere

$$\mathbb{C}^n/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \text{ “=” Bahnenraum.}$$

Beispiel: $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

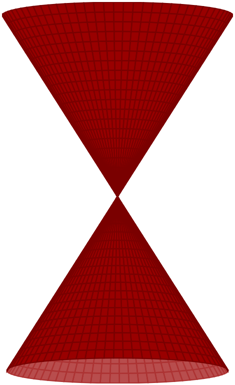
```
doctor@tardis:~ # julia
[...]
julia> using Oscar
[...]
julia> M = matrix(QQ, 2, 2, [ -1, 0, 0, -1 ]);
julia> G = matrix_group(M);
julia> RG = invariant_ring(G);
julia> affine_algebra(RG)[1]
Quotient of Multivariate Polynomial Ring in
y[1], y[2], y[3] over Rational Field graded by
  y[1] -> [2]
  y[2] -> [2]
  y[3] -> [2] by ideal(-y[1]*y[3] + y[2]^2)
```



Also: $\mathbb{C}[x_1, x_2]^G \cong \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]/\langle y_2^2 - y_1 y_3 \rangle$.

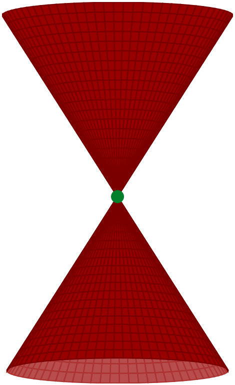
Auflösungen

Auflösungen



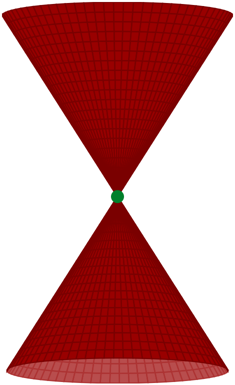
$\mathbb{C}^n/G$

Auflösungen



$\mathbb{C}^n/G$

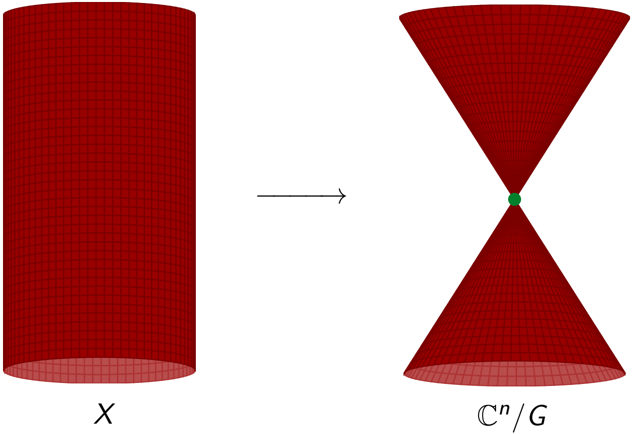
Auflösungen



$\mathbb{C}^n/G$

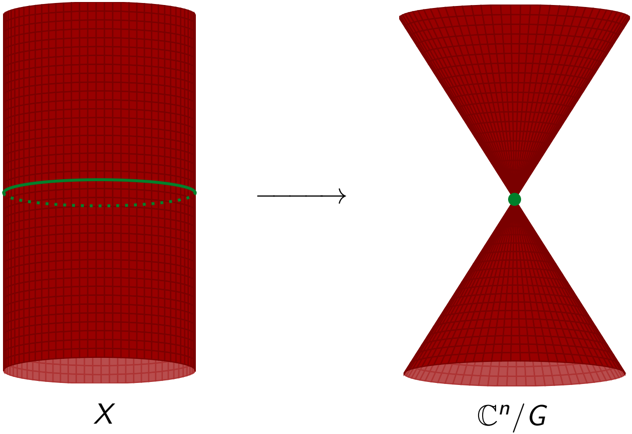
Eine Auflösung von $\mathbb{C}^n/G$ ist eine glatte Varietät X und ein eigentlicher birationaler Morphismus $X \to \mathbb{C}^n/G$.

Auflösungen



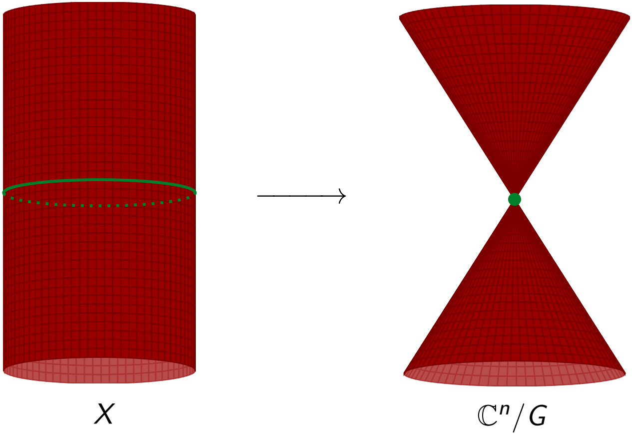
Eine Auflösung von $\mathbb{C}^n/G$ ist eine glatte Varietät X und ein eigentlicher birationaler Morphismus $X \to \mathbb{C}^n/G$.

Auflösungen



Eine Auflösung von $\mathbb{C}^n/G$ ist eine glatte Varietät X und ein eigentlicher birationaler Morphismus $X \to \mathbb{C}^n/G$.

Auflösungen



Existiert immer! (Hironaka, 1964)

Symplektische Gruppen

Symplektische Gruppen

Sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \ .$$

Symplektische Gruppen

Sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \; .$$

Definiere eine symplektische Form ω auf $\mathbb{C}^{2n}$ via

$$\omega(v, w) = v^\top J_n w$$

für $v, w \in \mathbb{C}^{2n}$.

Symplektische Gruppen

Sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) .$$

Definiere eine symplektische Form ω auf $\mathbb{C}^{2n}$ via

$$\omega(v, w) = v^\top J_n w$$

für $v, w \in \mathbb{C}^{2n}$. Die Gruppe

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid g^\top J_n g = J_n\}$$

ist die symplektische Gruppe (von Rang $2n$ über $\mathbb{C}$).

Symplektische Gruppen

Sei

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \ .$$

Definiere eine symplektische Form ω auf $\mathbb{C}^{2n}$ via

$$\omega(v, w) = v^\top J_n w$$

für $v, w \in \mathbb{C}^{2n}$. Die Gruppe

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid g^\top J_n g = J_n\}$$

ist die symplektische Gruppe (von Rang $2n$ über $\mathbb{C}$).

Beachte: Für $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ gilt

$$\omega(gv, gw) = v^\top (g^\top J_n g) w = v^\top J_n w = \omega(v, w) \ .$$

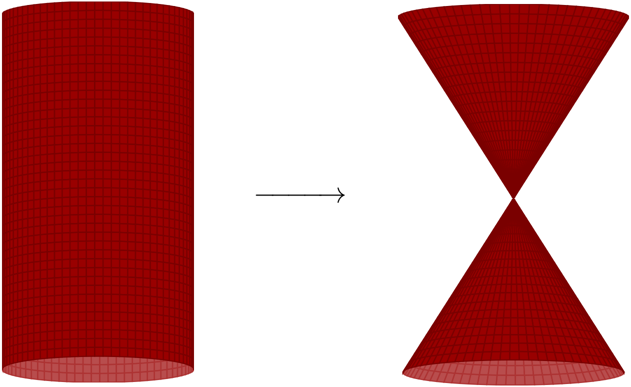
Symplektische Auflösungen

Symplektische Auflösungen

Sei nun $G \leq \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, zum Beispiel $G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$.

Symplektische Auflösungen

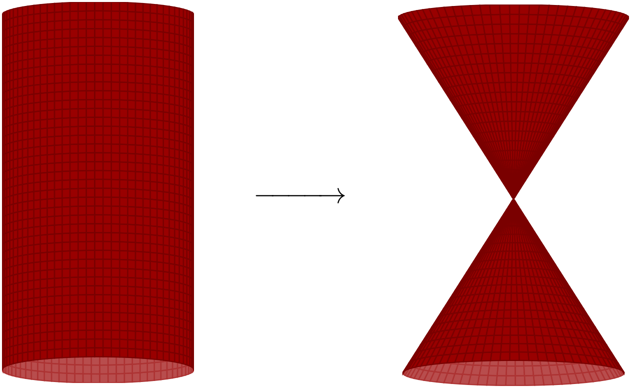
Sei nun $G \leq \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, zum Beispiel $G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$.



$X \longrightarrow \mathbb{C}^{2n}/G$

Symplektische Auflösungen

Sei nun $G \leq \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, zum Beispiel $G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$.



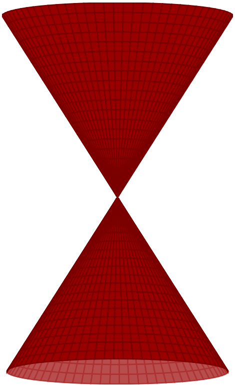
X $\qquad$ $(\mathbb{C}^{2n}/G, \omega)$

Symplektische Auflösungen

Sei nun $G \leq \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, zum Beispiel $G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathsf{Sp}_2(\mathbb{C})$.

?

$\longrightarrow$



$\exists ?\ (X, \omega_X)$

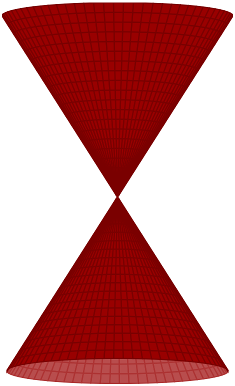
$(\mathbb{C}^{2n}/G, \omega)$

Symplektische Auflösungen

Sei nun $G \leq \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, zum Beispiel $G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathsf{Sp}_2(\mathbb{C})$.

?

$\longrightarrow$



$\exists?\ (X, \omega_X)$

$(\mathbb{C}^{2n}/G, \omega)$

Im Allgemeinen existiert keine solche Auflösung!