Seminar Darstellungstheorie
und darüber hinaus

Basiswissen: Gröbner, SAGBI, Khovanskii

Johannes Schmitt
RPTU Kaiserslautern-Landau
22. Juni 2023

Gröbner (Buchberger, 1965)

SAGBI

Khovanskii

Ideal membership

Ideal membership

Sei K ein Körper und $R := K[x_1, \ldots, x_n]$.

Ideal membership

Sei K ein Körper und $R := K[x_1, \ldots, x_n]$.

Seien $f_1, \ldots, f_k \in R$ und $I := \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.

Ideal membership

Sei K ein Körper und $R := K[x_1, \ldots, x_n]$.

Seien $f_1, \ldots, f_k \in R$ und $I := \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.

Ideal membership problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in I$.

Ideal membership

Sei K ein Körper und $R \coloneqq K[x_1, \ldots, x_n]$.

Seien $f_1, \ldots, f_k \in R$ und $I \coloneqq \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.

Ideal membership problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in I$.

Für $n = 1$: Bestimme $g \coloneqq \mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_k)$ und teste $g \mid f$.

Ideal membership

Sei K ein Körper und $R := K[x_1, \dots, x_n]$.

Seien $f_1, \dots, f_k \in R$ und $I := \langle f_1, \dots, f_k \rangle$.

Ideal membership problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in I$.

Für $n = 1$: Bestimme $g := \mathrm{ggT}(f_1, \dots, f_k)$ und teste $g \mid f$.

Für $n > 1$: R ist nicht euklidisch...

Monomordnungen

Monomordnungen

Eine Monomordnung ist eine Totalordnung $>$ auf der Menge der Monome $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\}$, die kompatibel mit der Multiplikation ist:

$$x^\alpha > x^\beta \Longrightarrow x^\gamma x^\alpha > x^\gamma x^\beta$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

Monomordnungen

Eine Monomordnung ist eine Totalordnung $>$ auf der Menge der Monome $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$, die kompatibel mit der Multiplikation ist:

$$x^\alpha > x^\beta \Longrightarrow x^\gamma x^\alpha > x^\gamma x^\beta$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

Eine Monomordnung $>$ heißt global, wenn $x_i > 1$ für alle i gilt.

Monomordnungen

Eine Monomordnung ist eine Totalordnung $>$ auf der Menge der Monome $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$, die kompatibel mit der Multiplikation ist:

$$x^\alpha > x^\beta \Longrightarrow x^\gamma x^\alpha > x^\gamma x^\beta$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

Eine Monomordnung $>$ heißt global, wenn $x_i > 1$ für alle i gilt.

Beispiel

- Lex: $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 1$

Monomordnungen

Eine Monomordnung ist eine Totalordnung $>$ auf der Menge der Monome $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$, die kompatibel mit der Multiplikation ist:

$$x^\alpha > x^\beta \Longrightarrow x^\gamma x^\alpha > x^\gamma x^\beta$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

Eine Monomordnung $>$ heißt global, wenn $x_i > 1$ für alle i gilt.

Beispiel

- Lex: $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 1$
- Degrevlex: $\deg x^\alpha > \deg x^\beta$ oder Lex umgedreht

Monomordnungen

Eine Monomordnung ist eine Totalordnung $>$ auf der Menge der Monome $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$, die kompatibel mit der Multiplikation ist:

$$x^\alpha > x^\beta \Longrightarrow x^\gamma x^\alpha > x^\gamma x^\beta$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

Eine Monomordnung $>$ heißt global, wenn $x_i > 1$ für alle i gilt.

Beispiel

- Lex: $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 1$
- Degrevlex: $\deg x^\alpha > \deg x^\beta$ oder Lex umgedreht
- Neglex: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$

Monomordnungen

Eine Monomordnung ist eine Totalordnung $>$ auf der Menge der Monome $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$, die kompatibel mit der Multiplikation ist:

$$x^\alpha > x^\beta \Longrightarrow x^\gamma x^\alpha > x^\gamma x^\beta$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

Eine Monomordnung $>$ heißt global, wenn $x_i > 1$ für alle i gilt.

Beispiel

- Lex: $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 1$
- Degrevlex: $\deg x^\alpha > \deg x^\beta$ oder Lex umgedreht
- Neglex: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$
- Für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$: $x^\alpha > x^\beta \Longleftrightarrow A\alpha >_{\mathrm{lex}} A\beta$, wobei $>_{\mathrm{lex}}$ die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Q}^n$ ist.

Gröbnerbasen

Gröbnerbasen

Sei $>$ eine Monomordnung auf R.

Gröbnerbasen

Sei $>$ eine Monomordnung auf R. Für $f \in R$ und $G \subseteq R$ sei $\mathrm{LM}(f)$ das Leitmonom von f und $\mathrm{L}(G) \coloneqq \langle \mathrm{LM}(g) \mid g \in G \rangle \trianglelefteq R$ das Leitideal von G.

Gröbnerbasen

Sei $>$ eine Monomordnung auf R. Für $f \in R$ und $G \subseteq R$ sei $\mathrm{LM}(f)$ das Leitmonom von f und $\mathrm{L}(G) \coloneqq \langle \mathrm{LM}(g) \mid g \in G \rangle \trianglelefteq R$ das Leitideal von G.
Eine endliche Menge $G \subseteq I \trianglelefteq R$ heißt Gröbnerbasis von I, wenn $\mathrm{L}(I) = \mathrm{L}(G)$.

Gröbnerbasen

Sei $>$ eine Monomordnung auf R. Für $f \in R$ und $G \subseteq R$ sei $\mathrm{LM}(f)$ das Leitmonom von f und $\mathrm{L}(G) \coloneqq \langle \mathrm{LM}(g) \mid g \in G \rangle \trianglelefteq R$ das Leitideal von G.
Eine endliche Menge $G \subseteq I \trianglelefteq R$ heißt Gröbnerbasis von I, wenn $\mathrm{L}(I) = \mathrm{L}(G)$.

Beispiel

- Für $n = 1$ und Lex ist $\mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_k)$ eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.

Gröbnerbasen

Sei $>$ eine Monomordnung auf R. Für $f \in R$ und $G \subseteq R$ sei $\mathrm{LM}(f)$ das Leitmonom von f und $\mathrm{L}(G) \coloneqq \langle \mathrm{LM}(g) \mid g \in G \rangle \trianglelefteq R$ das Leitideal von G.
Eine endliche Menge $G \subseteq I \trianglelefteq R$ heißt Gröbnerbasis von I, wenn $\mathrm{L}(I) = \mathrm{L}(G)$.

Beispiel

- Für $n = 1$ und Lex ist $\mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_k)$ eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.
- Seien $f_1 \coloneqq x^2 + y, f_2 \coloneqq xy + x \in K[x, y]$, $I \coloneqq \langle f_1, f_2 \rangle$ und $>$ Degrevlex.

Gröbnerbasen

Sei $>$ eine Monomordnung auf R. Für $f \in R$ und $G \subseteq R$ sei $\mathrm{LM}(f)$ das Leitmonom von f und $\mathrm{L}(G) \coloneqq \langle \mathrm{LM}(g) \mid g \in G \rangle \trianglelefteq R$ das Leitideal von G.
Eine endliche Menge $G \subseteq I \trianglelefteq R$ heißt Gröbnerbasis von I, wenn $\mathrm{L}(I) = \mathrm{L}(G)$.

Beispiel

- Für $n = 1$ und Lex ist $\mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_k)$ eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.
- Seien $f_1 \coloneqq x^2 + y, f_2 \coloneqq xy + x \in K[x, y]$, $I \coloneqq \langle f_1, f_2 \rangle$ und $>$ Degrevlex. Dann ist $f_3 \coloneqq y^2 + y = (y + 1)f_1 - xf_2 \in I$, also ist $\{f_1, f_2\}$ keine Gröbnerbasis für I und $>$.

Gröbnerbasen

Sei $>$ eine Monomordnung auf R. Für $f \in R$ und $G \subseteq R$ sei $\mathrm{LM}(f)$ das Leitmonom von f und $\mathrm{L}(G) := \langle \mathrm{LM}(g) \mid g \in G \rangle \trianglelefteq R$ das Leitideal von G.
Eine endliche Menge $G \subseteq I \trianglelefteq R$ heißt Gröbnerbasis von I, wenn $\mathrm{L}(I) = \mathrm{L}(G)$.

Beispiel

- Für $n = 1$ und Lex ist $\mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_k)$ eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.
- Seien $f_1 := x^2 + y, f_2 := xy + x \in K[x, y]$, $I := \langle f_1, f_2 \rangle$ und $>$ Degrevlex. Dann ist $f_3 := y^2 + y = (y + 1)f_1 - xf_2 \in I$, also ist $\{f_1, f_2\}$ keine Gröbnerbasis für I und $>$.

Lemma

Für jedes Ideal I existiert eine Gröbnerbasis G.

Gröbnerbasen

Sei $>$ eine Monomordnung auf R. Für $f \in R$ und $G \subseteq R$ sei $\mathrm{LM}(f)$ das Leitmonom von f und $\mathrm{L}(G) \coloneqq \langle \mathrm{LM}(g) \mid g \in G \rangle \trianglelefteq R$ das Leitideal von G.
Eine endliche Menge $G \subseteq I \trianglelefteq R$ heißt Gröbnerbasis von I, wenn $\mathrm{L}(I) = \mathrm{L}(G)$.

Beispiel

- Für $n = 1$ und Lex ist $\mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_k)$ eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.
- Seien $f_1 \coloneqq x^2 + y, f_2 \coloneqq xy + x \in K[x, y]$, $I \coloneqq \langle f_1, f_2 \rangle$ und $>$ Degrevlex. Dann ist $f_3 \coloneqq y^2 + y = (y + 1)f_1 - xf_2 \in I$, also ist $\{f_1, f_2\}$ keine Gröbnerbasis für I und $>$.

Lemma

Für jedes Ideal I existiert eine Gröbnerbasis G. Jede Gröbnerbasis von I ist ein Erzeugendensystem für I.

Normalformen

Normalformen

Das S-Polynom von $f, g \in R$ ist definiert als

$$\mathrm{spoly}(f,g) = \frac{\mathrm{kgV}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))}{\mathrm{LT}(f)} f - \frac{\mathrm{kgV}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))}{\mathrm{LT}(g)} g \ .$$

Normalformen

Das S-Polynom von $f, g \in R$ ist definiert als

$$\mathrm{spoly}(f,g) = \frac{\mathrm{kgV}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))}{\mathrm{LT}(f)} f - \frac{\mathrm{kgV}(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))}{\mathrm{LT}(g)} g \,.$$

Division mit Rest

Input: $>$ globale Monomordnung, $f \in R$, $G \subseteq R$ endlich
Output: $\mathrm{NF}(f|G) \in R$: Normalform von f bezüglich G
$h := f$
while $h \neq 0$ und $\exists g \in G$: $\mathrm{LM}(g) \mid \mathrm{LM}(h)$ **do**
  $h := \mathrm{spoly}(h, g)$
return h

Normalformen

Das S-Polynom von $f, g \in R$ ist definiert als

$$\operatorname{spoly}(f, g) = \frac{\operatorname{kgV}(\operatorname{LM}(f), \operatorname{LM}(g))}{\operatorname{LT}(f)} f - \frac{\operatorname{kgV}(\operatorname{LM}(f), \operatorname{LM}(g))}{\operatorname{LT}(g)} g \, .$$

Division mit Rest

Input: $>$ globale Monomordnung, $f \in R$, $G \subseteq R$ endlich
Output: $\operatorname{NF}(f|G) \in R$: Normalform von f bezüglich G
$h := f$
while $h \neq 0$ und $\exists g \in G$: $\operatorname{LM}(g) \mid \operatorname{LM}(h)$ **do**
    $h := \operatorname{spoly}(h, g)$
return h

Satz

Sei $I \trianglelefteq R$, G eine Gröbnerbasis für I und $f \in R$. Dann ist $f \in I$ genau dann, wenn $\operatorname{NF}(f|G) = 0$.

Buchbergeralgorithmus

Buchbergeralgorithmus

Gröbnerbasis

Input: $>$ Monomordnung, $f_1, \ldots, f_k \in R$
Output: eine Gröbnerbasis für $I := \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$
$G := \{f_1, \ldots, f_k\}$
$P := \{(f, g) \mid f, g \in G, f \neq g\}$
while $P \neq \emptyset$ **do**
  $f, g := \mathtt{pop}(P)$
  $h := \mathrm{NF}(\mathrm{spoly}(f, g) \mid G)$
  if $h \neq 0$ **then**
    $P := P \cup \{(h, f) \mid f \in G\}$
    $G := G \cup \{h\}$
return G

Buchbergeralgorithmus

Gröbnerbasis

Input: $>$ Monomordnung, $f_1, \dots, f_k \in R$
Output: eine Gröbnerbasis für $I := \langle f_1, \dots, f_k \rangle$

$G := \{f_1, \dots, f_k\}$
$P := \{(f, g) \mid f, g \in G, f \neq g\}$
while $P \neq \emptyset$ **do**
  $f, g := \mathtt{pop}(P)$
  $h := \mathrm{NF}(\mathrm{spoly}(f, g) \mid G)$
  if $h \neq 0$ **then**
    $P := P \cup \{(h, f) \mid f \in G\}$
    $G := G \cup \{h\}$
return G

Satz

Der obige Algorithmus liefert eine Gröbnerbasis nach endlich vielen Schritten.

Gröbner

SAGBI (Robbiano–Sweedler, 1990)

Khovanskii

Das nächste Problem

Das nächste Problem

Sei $A \leq R$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

Das nächste Problem

Sei $A \leq R$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

Problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in A$.

Das nächste Problem

Sei $A \leq R$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

Problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in A$.

Antwort:

Das nächste Problem

Sei $A \leq R$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

Problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in A$.

Antwort: **S**ubalgebra

Das nächste Problem

Sei $A \leq R$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

Problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in A$.

Antwort: **S**ubalgebra **A**nalog to

Das nächste Problem

Sei $A \leq R$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

Problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in A$.

Antwort: **S**ubalgebra **A**nalog to **G**röbner

Das nächste Problem

Sei $A \leq R$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

Problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in A$.

Antwort: **S**ubalgebra **A**nalog to **G**röbner **B**ases for

Das nächste Problem

Sei $A \leq R$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

Problem

Gegeben $f \in R$, entscheide, ob $f \in A$.

Antwort: **S**ubalgebra **A**nalog to **G**röbner **B**ases for **I**deals

Filtrierungen

Filtrierungen

Sei $\succ$ eine Monoidordnung auf $\mathbb{Z}^m$, das heißt, eine Totalordnung mit $a \succ b \Longrightarrow a + c \succ b + c$.

Filtrierungen

Sei $\succ$ eine Monoidordnung auf $\mathbb{Z}^m$, das heißt, eine Totalordnung mit $a \succ b \Longrightarrow a + c \succ b + c$.
Vektorräume $(A_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^m}$ bilden eine Filtrierung von A, wenn

- $\bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} A_\gamma = A$
- $\gamma \preceq \gamma' \Longrightarrow A_\gamma \subseteq A_{\gamma'}$
- $A_\gamma \cdot A_{\gamma'} \subseteq A_{\gamma+\gamma'}$
- $1 \in A_0$ und $1 \notin A_\gamma$ für $\gamma \prec 0$.

Filtrierungen

Sei $\succ$ eine Monoidordnung auf $\mathbb{Z}^m$, das heißt, eine Totalordnung mit $a \succ b \Longrightarrow a + c \succ b + c$.
Vektorräume $(A_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^m}$ bilden eine Filtrierung von A, wenn

- $\bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} A_\gamma = A$
- $\gamma \preceq \gamma' \Longrightarrow A_\gamma \subseteq A_{\gamma'}$
- $A_\gamma \cdot A_{\gamma'} \subseteq A_{\gamma+\gamma'}$
- $1 \in A_0$ und $1 \notin A_\gamma$ für $\gamma \prec 0$.

Beispiel

Eine (globale) Monomordnung $>$ auf R induziert eine Monoidordnung $\succ$ auf $\mathbb{Z}^n$.

Filtrierungen

Sei $\succ$ eine Monoidordnung auf $\mathbb{Z}^m$, das heißt, eine Totalordnung mit $a \succ b \Longrightarrow a + c \succ b + c$.
Vektorräume $(A_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^m}$ bilden eine Filtrierung von A, wenn

- $\bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} A_\gamma = A$
- $\gamma \preceq \gamma' \Longrightarrow A_\gamma \subseteq A_{\gamma'}$
- $A_\gamma \cdot A_{\gamma'} \subseteq A_{\gamma+\gamma'}$
- $1 \in A_0$ und $1 \notin A_\gamma$ für $\gamma \prec 0$.

Beispiel

Eine (globale) Monomordnung $>$ auf R induziert eine Monoidordnung $\succ$ auf $\mathbb{Z}^n$. Für eine Algebra $A \leq R$ ist durch

$$A_\alpha := \{f \in A \setminus \{0\} \mid f \leq x^\alpha\} \cup \{0\}$$

eine Filtrierung gegeben.

Filtrierungen

Sei $\succ$ eine Monoidordnung auf $\mathbb{Z}^m$, das heißt, eine Totalordnung mit $a \succ b \Longrightarrow a + c \succ b + c$.
Vektorräume $(A_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^m}$ bilden eine Filtrierung von A, wenn

- $\bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} A_\gamma = A$
- $\gamma \preceq \gamma' \Longrightarrow A_\gamma \subseteq A_{\gamma'}$
- $A_\gamma \cdot A_{\gamma'} \subseteq A_{\gamma+\gamma'}$
- $1 \in A_0$ und $1 \notin A_\gamma$ für $\gamma \prec 0$.

Beispiel

Eine (globale) Monomordnung $>$ auf R induziert eine Monoidordnung $\succ$ auf $\mathbb{Z}^n$. Für eine Algebra $A \leq R$ ist durch

$$A_\alpha := \{f \in A \setminus \{0\} \mid f \leq x^\alpha\} \cup \{0\}$$

eine Filtrierung gegeben.

Sei $A_{\prec\gamma} := \bigcup_{\gamma' \prec \gamma} A_{\gamma'}$. Der Ring $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} (A_\gamma / A_{\prec\gamma})$ ist der assoziierte graduierte Ring zur Filtrierung $(A_\gamma)_\gamma$.

SAGBI-Basen

SAGBI-Basen

Sei $>$ eine globale Monomordnung auf R.

SAGBI-Basen

Sei $>$ eine globale Monomordnung auf R.

Eine Menge $S \subseteq A$ heißt SAGBI-Basis von A, wenn das Monoid $\{\mathrm{LM}(f) \mid f \in A\}$ von $\{\mathrm{LM}(f) \mid f \in S\}$ erzeugt wird.

SAGBI-Basen

Sei $>$ eine globale Monomordnung auf R.

Eine Menge $S \subseteq A$ heißt SAGBI-Basis von A, wenn das Monoid $\{\mathrm{LM}(f) \mid f \in A\}$ von $\{\mathrm{LM}(f) \mid f \in S\}$ erzeugt wird.

Mit der korrespondierenden Monoidordnung $\succ$ gilt

$$\mathrm{gr}(A) \cong K[\mathrm{LM}(f) \mid f \in A] \,,$$

also ist S eine SAGBI-Basis genau dann, wenn

$$\mathrm{gr}(A) \cong K[\mathrm{LM}(f) \mid f \in S] =: K[\mathrm{LM}(S)] \,.$$

SAGBI-Basen

Sei $>$ eine globale Monomordnung auf R.

Eine Menge $S \subseteq A$ heißt SAGBI-Basis von A, wenn das Monoid $\{\mathrm{LM}(f) \mid f \in A\}$ von $\{\mathrm{LM}(f) \mid f \in S\}$ erzeugt wird.

Mit der korrespondierenden Monoidordnung $\succ$ gilt

$$\mathrm{gr}(A) \cong K[\mathrm{LM}(f) \mid f \in A]\,,$$

also ist S eine SAGBI-Basis genau dann, wenn

$$\mathrm{gr}(A) \cong K[\mathrm{LM}(f) \mid f \in S] =: K[\mathrm{LM}(S)]\,.$$

Lemma

Eine SAGBI-Basis von A ist ein Erzeugendensystem von A.

SAGBI-Basen

Sei $>$ eine globale Monomordnung auf R.

Eine Menge $S \subseteq A$ heißt SAGBI-Basis von A, wenn das Monoid $\{\mathrm{LM}(f) \mid f \in A\}$ von $\{\mathrm{LM}(f) \mid f \in S\}$ erzeugt wird.

Mit der korrespondierenden Monoidordnung $\succ$ gilt

$$\mathrm{gr}(A) \cong K[\mathrm{LM}(f) \mid f \in A] \,,$$

also ist S eine SAGBI-Basis genau dann, wenn

$$\mathrm{gr}(A) \cong K[\mathrm{LM}(f) \mid f \in S] =: K[\mathrm{LM}(S)] \,.$$

Lemma

Eine SAGBI-Basis von A ist ein Erzeugendensystem von A.

Lemma

Eine endliche SAGBI-Basis existiert genau dann, wenn $\mathrm{gr}(A)$ endlich erzeugt ist.

Zwei Beispiele

Zwei Beispiele

Beispiel

Sei $A = K[x^3 - x, x^4, x^5 - 1] \leq K[x]$.

Zwei Beispiele

Beispiel

Sei $A = K[x^3 - x, x^4, x^5 - 1] \leq K[x]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x = &-(x^3 - x)^3 + x^4(x^5 - 1) \\ &- 3(x^3 - x)x^4 + x^4 - (x^3 - x) \in A\,. \end{aligned}$$

Zwei Beispiele

Beispiel

Sei $A = K[x^3 - x, x^4, x^5 - 1] \leq K[x]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x = &-(x^3 - x)^3 + x^4(x^5 - 1) \\ &- 3(x^3 - x)x^4 + x^4 - (x^3 - x) \in A\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\{x\}$ eine SAGBI-Basis von A (für beliebiges globales $>$) und $A = K[x]$.

Zwei Beispiele

Beispiel

Sei $A = K[x^3 - x, x^4, x^5 - 1] \leq K[x]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x = &-(x^3 - x)^3 + x^4(x^5 - 1) \\ &- 3(x^3 - x)x^4 + x^4 - (x^3 - x) \in A\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\{x\}$ eine SAGBI-Basis von A (für beliebiges globales $>$) und $A = K[x]$.

Beispiel

Seien $f_1 \coloneqq x + y, f_2 \coloneqq xy, f_3 \coloneqq xy^2 \in K[x, y]$, $A \coloneqq K[f_1, f_2, f_3]$ und $>$ eine globale Monomordnung.

Zwei Beispiele

Beispiel

Sei $A = K[x^3 - x, x^4, x^5 - 1] \leq K[x]$. Dann gilt

$$x = -(x^3 - x)^3 + x^4(x^5 - 1) \\ - 3(x^3 - x)x^4 + x^4 - (x^3 - x) \in A\,.$$

Insbesondere ist $\{x\}$ eine SAGBI-Basis von A (für beliebiges globales $>$) und $A = K[x]$.

Beispiel

Seien $f_1 := x + y, f_2 := xy, f_3 := xy^2 \in K[x, y]$, $A := K[f_1, f_2, f_3]$ und $>$ eine globale Monomordnung. Man kann zeigen, dass

$$\operatorname{gr}(A) = K[x, xy, xy^2, \dots]$$

(unabhängig von $>$).

Zwei Beispiele

Beispiel

Sei $A = K[x^3 - x, x^4, x^5 - 1] \leq K[x]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x = &-(x^3 - x)^3 + x^4(x^5 - 1) \\ &- 3(x^3 - x)x^4 + x^4 - (x^3 - x) \in A\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\{x\}$ eine SAGBI-Basis von A (für beliebiges globales $>$) und $A = K[x]$.

Beispiel

Seien $f_1 := x + y, f_2 := xy, f_3 := xy^2 \in K[x, y]$, $A := K[f_1, f_2, f_3]$ und $>$ eine globale Monomordnung. Man kann zeigen, dass

$$\mathrm{gr}(A) = K[x, xy, xy^2, \ldots]$$

(unabhängig von $>$). Also hat A keine endliche SAGBI-Basis.

Subduction

Subduction

Subduction

Input: $>$ globale Monomordnung, $f \in R$, $S \subseteq R$
Output: $h \in R$: „subduction" von f bezüglich S
$h := f$
while $h \notin K$ und $\mathrm{LM}(h) \in K[\mathrm{LM}(S)]$ **do**
  Nach Annahme gibt es $g_1, \ldots, g_k \in S$ und ein Polynom $p \in K[y_1, \ldots, y_k]$ mit $\mathrm{LM}(p(g_1, \ldots, g_k)) = \mathrm{LM}(h)$
  $h := h - p(g_1, \ldots, g_k)$
return h

Subduction

Subduction

Input: $>$ globale Monomordnung, $f \in R$, $S \subseteq R$
Output: $h \in R$: „subduction“ von f bezüglich S
$h := f$
while $h \notin K$ und $\mathrm{LM}(h) \in K[\mathrm{LM}(S)]$ **do**
Nach Annahme gibt es $g_1, \ldots, g_k \in S$ und ein Polynom $p \in K[y_1, \ldots, y_k]$ mit $\mathrm{LM}(p(g_1, \ldots, g_k)) = \mathrm{LM}(h)$
$h := h - p(g_1, \ldots, g_k)$
return h

Satz

Sei S eine SAGBI-Basis für A und $f \in R$. Dann ist $f \in A$ genau dann, wenn f bezüglich S zu 0 „subduziert“.

Beispiel

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Dann ist $f := x^8 = f_2^2$.

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Dann ist $f := x^8 = f_2^2$.

Wir können f aber auch auf andere Art reduzieren:

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Dann ist $f \coloneqq x^8 = f_2^2$.

Wir können f aber auch auf andere Art reduzieren:

$f - f_1 f_3 = x^6 + x^3 - x$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Dann ist $f := x^8 = f_2^2$.

Wir können f aber auch auf andere Art reduzieren:

$f - f_1 f_3 = x^6 + x^3 - x$

$x^6 + x^3 - x - f_1^2 = 2x^4 + x^3 - x^2 - x$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Dann ist $f := x^8 = f_2^2$.

Wir können f aber auch auf andere Art reduzieren:

$f - f_1 f_3 = x^6 + x^3 - x$

$x^6 + x^3 - x - f_1^2 = 2x^4 + x^3 - x^2 - x$

$2x^4 + x^3 - x^2 - x - 2f_2 = x^3 - x^2 - x$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Dann ist $f := x^8 = f_2^2$.

Wir können f aber auch auf andere Art reduzieren:

$f - f_1 f_3 = x^6 + x^3 - x$

$x^6 + x^3 - x - f_1^2 = 2x^4 + x^3 - x^2 - x$

$2x^4 + x^3 - x^2 - x - 2f_2 = x^3 - x^2 - x$

$x^3 - x^2 - x - f_1 = -x^2$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Dann ist $f := x^8 = f_2^2$.

Wir können f aber auch auf andere Art reduzieren:

$f - f_1 f_3 = x^6 + x^3 - x$

$x^6 + x^3 - x - f_1^2 = 2x^4 + x^3 - x^2 - x$

$2x^4 + x^3 - x^2 - x - 2f_2 = x^3 - x^2 - x$

$x^3 - x^2 - x - f_1 = -x^2$

x^2 lässt sich nicht weiter reduzieren.

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Dann ist $f \coloneqq x^8 = f_2^2$.

Wir können f aber auch auf andere Art reduzieren:

$f - f_1 f_3 = x^6 + x^3 - x$

$x^6 + x^3 - x - f_1^2 = 2x^4 + x^3 - x^2 - x$

$2x^4 + x^3 - x^2 - x - 2f_2 = x^3 - x^2 - x$

$x^3 - x^2 - x - f_1 = -x^2$

x^2 lässt sich nicht weiter reduzieren.

Das zeigt wiederum, dass $\{f_1, f_2, f_3\}$ keine SAGBI-Basis für $K[f_1, f_2, f_3]$ ist.

Noch eine Charakterisierung

Noch eine Charakterisierung

Seien $f_1, \ldots, f_k \in R$, $A := K[f_1, \ldots, f_k]$ und $>$ eine globale Monomordnung auf R.

Noch eine Charakterisierung

Seien $f_1, \ldots, f_k \in R$, $A := K[f_1, \ldots, f_k]$ und $>$ eine globale Monomordnung auf R.

Betrachte die Abbildungen

$$\varphi : K[y_1, \ldots, y_k] \to A, \; y_i \mapsto f_i$$

sowie

$$\Phi : K[y_1, \ldots, y_k] \to \mathrm{gr}(A), \; y_i \mapsto \mathrm{LM}(f_i) \,.$$

Noch eine Charakterisierung

Seien $f_1, \dots, f_k \in R$, $A := K[f_1, \dots, f_k]$ und $>$ eine globale Monomordnung auf R.

Betrachte die Abbildungen

$$\varphi : K[y_1, \dots, y_k] \to A,\ \ y_i \mapsto f_i$$

sowie

$$\Phi : K[y_1, \dots, y_k] \to \mathrm{gr}(A),\ \ y_i \mapsto \mathrm{LM}(f_i)\ .$$

Bezeichne $\deg_>$ die Graduierung von $\mathrm{gr}(A)$ und graduiere $K[y_1, \dots, y_k]$ via

$$\deg_>(y_i) := \deg_>(\mathrm{LM}(f_i))\ .$$

Noch eine Charakterisierung

Seien $f_1, \dots, f_k \in R$, $A := K[f_1, \dots, f_k]$ und $>$ eine globale Monomordnung auf R.

Betrachte die Abbildungen

$$\varphi : K[y_1, \dots, y_k] \to A,\ \ y_i \mapsto f_i$$

sowie

$$\Phi : K[y_1, \dots, y_k] \to \mathrm{gr}(A),\ \ y_i \mapsto \mathrm{LM}(f_i)\ .$$

Bezeichne $\deg_>$ die Graduierung von $\mathrm{gr}(A)$ und graduiere $K[y_1, \dots, y_k]$ via

$$\deg_>(y_i) := \deg_>(\mathrm{LM}(f_i))\ .$$

Die Leitform von $h = \sum_\alpha \lambda_\alpha y^\alpha \in K[y_1, \dots, y_k]$ sei

$$\mathrm{LF}(h) := \sum_{\substack{\alpha \\ \deg_>(\lambda_\alpha y^\alpha) = \deg_>(h)}} \lambda_\alpha y^\alpha\ .$$

Beispiel

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$ und $A := K[f_1, f_2, f_3]$.

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$ und $A := K[f_1, f_2, f_3]$.

Dann ist $\operatorname{gr}(A) = K[x^3, x^4, x^5]$ und $\deg_>$ ist der übliche Polynomgrad.

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$ und $A := K[f_1, f_2, f_3]$.

Dann ist $\mathrm{gr}(A) = K[x^3, x^4, x^5]$ und $\deg_>$ ist der übliche Polynomgrad. Mit

$$\Phi : K[y_1, y_2, y_3] \to \mathrm{gr}(A),\ \ y_1 \mapsto x^3,\ \ y_2 \mapsto x^4,\ \ y_3 \mapsto x^5$$

gilt also

$$\deg_>(y_1) = 3, \quad \deg_>(y_2) = 4, \quad \deg_>(y_3) = 5\ .$$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$ und $A := K[f_1, f_2, f_3]$.

Dann ist $\mathrm{gr}(A) = K[x^3, x^4, x^5]$ und $\deg_>$ ist der übliche Polynomgrad. Mit

$$\Phi : K[y_1, y_2, y_3] \to \mathrm{gr}(A),\ \ y_1 \mapsto x^3,\ \ y_2 \mapsto x^4,\ \ y_3 \mapsto x^5$$

gilt also

$$\deg_>(y_1) = 3, \quad \deg_>(y_2) = 4, \quad \deg_>(y_3) = 5\ .$$

Das Polynom $h = y_1^3 + y_2 y_3 + y_1$ hat entsprechend die Leitform

$$\mathrm{LF}(h) = y_1^3 + y_2 y_3\ .$$

Weiter im Text (noch eine Charakterisierung)

Weiter im Text (noch eine Charakterisierung)

Lemma (Fundamentales SAGBI Diagramm)

Mit der obigen Notation gibt es ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\varphi \arrow[r] & K[y_1,\dots,y_k] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathsf{LF}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{LM}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker\Phi \arrow[r] & K[y_1,\dots,y_k] \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{gr}(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Weiter im Text (noch eine Charakterisierung)

Lemma (Fundamentales SAGBI Diagramm)

Mit der obigen Notation gibt es ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker\varphi \arrow[r] & K[y_1,\dots,y_k] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{LF}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{LM}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker\Phi \arrow[r] & K[y_1,\dots,y_k] \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{gr}(A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Proposition

Die Menge $\{f_1,\dots,f_k\}$ ist eine SAGBI-Basis von A bezüglich $>$ genau dann, wenn es für jedes $\deg_>$-homogene $h \in \ker\Phi$ ein $h' \in \ker\varphi$ mit $\mathrm{LF}(h') = h$ gibt.

Beispiel

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$ und $A \coloneqq K[f_1, f_2, f_3]$.

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$ und $A \coloneqq K[f_1, f_2, f_3]$.

Dann ist

$$\ker \Phi = \langle y_1 y_3 - y_2^2, y_1^2 y_2 - y_3^2, y_1^3 - y_2 y_3 \rangle \ .$$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$ und $A \coloneqq K[f_1, f_2, f_3]$.

Dann ist

$$\ker \Phi = \langle y_1 y_3 - y_2^2, y_1^2 y_2 - y_3^2, y_1^3 - y_2 y_3 \rangle \ .$$

Mit Hilfe von Gröbnerbasen berechnet man, dass $y_1 y_3 - y_2^2$ und $y_1^3 - y_2 y_3$ keine Leitformen von Element in $\ker \varphi$ sind.

Berechnung von SAGBI-Basen

Berechnung von SAGBI-Basen

SAGBI-Basis (modulo Details)

Input: $>$ globale Monomordnung, $f_1, \ldots, f_k \in R$
Output: eine endliche SAGBI-Basis für $K[f_1, \ldots, f_k]$, falls diese existiert

$S \coloneqq \{f_1, \ldots, f_k\}$
`fertig` $\coloneqq$ `false`
while `fertig` $=$ `false` **do**
  `fertig` $\coloneqq$ `true`
  Seien B Erzeuger der Relationen der $\mathrm{LM}(f_i)$
  for $b \in B$ **do**
    Sei b' die „subduction“ von $b(f_1, \ldots, f_k)$ bezüglich S
    if $b' \neq 0$ **then**
      `fertig` $\coloneqq$ `false`
      $k \coloneqq k + 1$
      $f_k \coloneqq b'$
      $S \coloneqq S \cup \{f_k\}$
return S

Beispiel

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Erzeuger der Relationen von (x^3, x^4, x^5) sind

$$B := \{y_1 y_3 - y_2^2, y_1^2 y_2 - y_3^2, y_1^3 - y_2 y_3\} .$$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Erzeuger der Relationen von (x^3, x^4, x^5) sind

$$B := \{y_1 y_3 - y_2^2, y_1^2 y_2 - y_3^2, y_1^3 - y_2 y_3\}\ .$$

$b := y_1 y_3 - y_2^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -x^6 - x^3 + x \longrightarrow x^2$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Erzeuger der Relationen von (x^3, x^4, x^5) sind

$$B := \{y_1 y_3 - y_2^2, y_1^2 y_2 - y_3^2, y_1^3 - y_2 y_3\} \,.$$

$b := y_1 y_3 - y_2^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -x^6 - x^3 + x \longrightarrow x^2$

$b := y_1^2 y_2 - y_3^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -2x^8 + x^6 + 2x^5 - 1 \longrightarrow -x^2$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Erzeuger der Relationen von (x^3, x^4, x^5) sind

$$B := \{y_1y_3 - y_2^2, y_1^2y_2 - y_3^2, y_1^3 - y_2y_3\} \, .$$

$b := y_1y_3 - y_2^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -x^6 - x^3 + x \longrightarrow x^2$

$b := y_1^2y_2 - y_3^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -2x^8 + x^6 + 2x^5 - 1 \longrightarrow -x^2$

$b := y_1^3 - y_2y_3$: $b(f_1, f_2, f_3) = -3x^7 + 3x^5 + x^4 - x^3 \longrightarrow -x$

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Erzeuger der Relationen von (x^3, x^4, x^5) sind

$$B \coloneqq \{y_1y_3 - y_2^2, y_1^2y_2 - y_3^2, y_1^3 - y_2y_3\} .$$

$b \coloneqq y_1y_3 - y_2^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -x^6 - x^3 + x \longrightarrow x^2$

$b \coloneqq y_1^2y_2 - y_3^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -2x^8 + x^6 + 2x^5 - 1 \longrightarrow -x^2$

$b \coloneqq y_1^3 - y_2y_3$: $b(f_1, f_2, f_3) = -3x^7 + 3x^5 + x^4 - x^3 \longrightarrow -x$

Also fügen wir $f_4 \coloneqq x^2$ und $f_5 \coloneqq x$ zu den Erzeugern hinzu.

Beispiel

Seien wieder $f_1 = x^3 - x, f_2 = x^4, f_3 = x^5 - 1 \in K[x]$.

Erzeuger der Relationen von (x^3, x^4, x^5) sind

$$B \coloneqq \{y_1y_3 - y_2^2, y_1^2y_2 - y_3^2, y_1^3 - y_2y_3\} \ .$$

$b \coloneqq y_1y_3 - y_2^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -x^6 - x^3 + x \longrightarrow x^2$

$b \coloneqq y_1^2y_2 - y_3^2$: $b(f_1, f_2, f_3) = -2x^8 + x^6 + 2x^5 - 1 \longrightarrow -x^2$

$b \coloneqq y_1^3 - y_2y_3$: $b(f_1, f_2, f_3) = -3x^7 + 3x^5 + x^4 - x^3 \longrightarrow -x$

Also fügen wir $f_4 \coloneqq x^2$ und $f_5 \coloneqq x$ zu den Erzeugern hinzu.

Der Algorithmus terminiert im nächsten Schritt, da durch f_5 alles zu 0 reduziert wird.

Gröbner

SAGBI

Khovanskii (Kaveh–Manon, 2019)

Bewertungen

Bewertungen

Sei A eine K-Algebra, endlich erzeugt und nullteilerfrei.

Bewertungen

Sei A eine K-Algebra, endlich erzeugt und nullteilerfrei.
Sei $(\Gamma, +)$ eine abelsche Gruppe und $\succ$ eine Monoidordnung auf Γ.

Bewertungen

Sei A eine K-Algebra, endlich erzeugt und nullteilerfrei.
Sei $(\Gamma, +)$ eine abelsche Gruppe und $\succ$ eine Monoidordnung auf Γ.

Eine Bewertung ist eine Abbildung $v : A \setminus \{0\} \to \Gamma$ mit:

- Für alle $0 \neq f, g \in A$ mit $f + g \neq 0$ gilt $v(f + g) \succeq \min(v(f), v(g))$.
- Für alle $0 \neq f, g \in A$ gilt $v(fg) = v(f) + v(g)$.
- Für alle $0 \neq f \in A$ und $0 \neq c \in K$ gilt $v(cf) = v(f)$.

Bewertungen

Sei A eine K-Algebra, endlich erzeugt und nullteilerfrei.
Sei $(\Gamma, +)$ eine abelsche Gruppe und $\succ$ eine Monoidordnung auf Γ.

Eine Bewertung ist eine Abbildung $v : A \setminus \{0\} \to \Gamma$ mit:

- Für alle $0 \neq f, g \in A$ mit $f + g \neq 0$ gilt $v(f+g) \succeq \min(v(f), v(g))$.
- Für alle $0 \neq f, g \in A$ gilt $v(fg) = v(f) + v(g)$.
- Für alle $0 \neq f \in A$ und $0 \neq c \in K$ gilt $v(cf) = v(f)$.

Beispiel

Eine globale Monomordnung $>$ auf R induziert eine Monoidordnung $\succ$ auf $\mathbb{Z}^n$ und eine Bewertung $v : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^n$ via

$$v\Big(\sum_{\alpha} \lambda_\alpha x^\alpha\Big) := \min_{\substack{\alpha \\ \lambda_\alpha \neq 0}} \alpha \ .$$

Nochmal Filtrierungen

Nochmal Filtrierungen

Eine Bewertung v induziert eine (absteigende) Filtrierung von A via

$$A_\gamma := \{f \in A \setminus \{0\} \mid v(f) \succeq \gamma\} \cup \{0\} \,.$$

Nochmal Filtrierungen

Eine Bewertung v induziert eine (absteigende) Filtrierung von A via

$$A_\gamma := \{f \in A \setminus \{0\} \mid v(f) \succeq \gamma\} \cup \{0\}\,.$$

Beispiel

Ist $v : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^n$ induziert durch eine globale Monomordnung $>$, so ist Filtrierung einer Algebra $A \subseteq R$ durch v gegeben durch

$$A_\gamma^v = \left\{ f \in A \setminus \{0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{für jeden Term} \\ x^\alpha \text{ von } f \text{ gilt:} \end{array} \quad x^\alpha \geq x^\gamma \right\} \cup \{0\}\,.$$

Nochmal Filtrierungen

Eine Bewertung v induziert eine (absteigende) Filtrierung von A via

$$A_\gamma := \{f \in A \setminus \{0\} \mid v(f) \succeq \gamma\} \cup \{0\}\ .$$

Beispiel

Ist $v : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^n$ induziert durch eine globale Monomordnung $>$, so ist Filtrierung einer Algebra $A \subseteq R$ durch v gegeben durch

$$A_\gamma^v = \left\{ f \in A \setminus \{0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{für jeden Term} \\ x^\alpha \text{ von } f \text{ gilt:} \end{array} \quad x^\alpha \geq x^\gamma \right\} \cup \{0\}\ .$$

Die (aufsteigende) Filtrierung von A durch $>$ ist

$$A_\gamma^> = \{f \in A \setminus \{0\} \mid f \leq x^\gamma\} \cup \{0\}\ .$$

Khovanskiibasen

Khovanskiibasen

Sei $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}^r$ eine Bewertung mit $r \leq \dim(A)$.

Khovanskiibasen

Sei $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}^r$ eine Bewertung mit $r \leq \dim(A)$.

Eine Menge $B \subseteq A$ heißt Khovanskiibasis von (A, v), wenn das Bild von B in $\mathrm{gr}(A)$ die Algebra $\mathrm{gr}(A)$ erzeugt.

Khovanskiibasen

Sei $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}^r$ eine Bewertung mit $r \leq \dim(A)$.

Eine Menge $B \subseteq A$ heißt Khovanskiibasis von (A, v), wenn das Bild von B in $\mathrm{gr}(A)$ die Algebra $\mathrm{gr}(A)$ erzeugt.

Subduction und die Berechnung von Khovanskiibasen funktionieren analog zu SAGBI-Basen, indem „$\mathrm{LM}(f)$“ durch „das Bild von f in $\mathrm{gr}(A)$“ ersetzt wird.

Khovanskiibasen

Sei $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}^r$ eine Bewertung mit $r \leq \dim(A)$.

Eine Menge $B \subseteq A$ heißt Khovanskiibasis von (A, v), wenn das Bild von B in $\mathrm{gr}(A)$ die Algebra $\mathrm{gr}(A)$ erzeugt.

Subduction und die Berechnung von Khovanskiibasen funktionieren analog zu SAGBI-Basen, indem „$\mathrm{LM}(f)$“ durch „das Bild von f in $\mathrm{gr}(A)$“ ersetzt wird.

Remark 2.6. Let A be a subalgebra of a polynomial algebra $\mathbf{k}[\mathbf{x}]$. A Khovanskii basis for a lowest term valuation, as in Example 2.2(2), is usually called a *SAGBI basis*, which stands for *subalgebra analogue of Gröbner basis for ideals* (see [RS90], [Stu96, Chapter 11]). So the theory of Khovanskii bases far generalizes that of SAGBI bases.

Kiumars Kaveh und Christopher Manon, *Khovanskii Bases, Higher Rank Valuations, and Tropical Geometry*, SIAM J. Appl. Algebra Geom. **3** (2019), Nr. 2, 292–336.